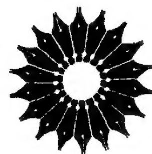


توپولوژی

کلاؤس ینیش

ترجمهٔ ارسلان شادمان



توپولوژی

کلاؤس ینیش

ترجمهٔ ارسلان شادمان

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۱۰۵

مرکز نشر دانشگاهی
۸۳۸



Topology
Klaus Jänich
Springer-Verlag, 1984

توپولوژی
تألیف کلاؤس ینیش
ترجمهٔ دکتر ارسلان شادمان
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها
نسخه‌پرداز : سیدسیاوش شایگانی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۶
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی : مرکز نشر دانشگاهی (آزاده ابری)
چاپ و صحافی : محمد

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

ینیش، کلاؤس — Jänich, Klaus
توپولوژی / تألیف کلاؤس ینیش؛ ترجمهٔ ارسلان شادمان.ـ تهران : مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.
شش، ۲۵۲ ص. : مصور، جدول، نمودار. ـ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۸۳۸. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۱۰۵).
ISBN 964-01-0838-3
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار)
عنوان اصلی: Topologie = Topology
واژدنامه.
کتابنامه: ص. ۲۲۵ـ۲۲۶.
۱.توپولوژی. الف. شادمان، ارسلان، ۱۳۱۷ـ مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
۹ ت ۲ ی / QA ۶۱۱ — ۵۱۴
۱۳۷۶
کتابخانهٔ ملی ایران — ۱۲۹۳ ـ ۷۶ م

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان صفحه

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه

پیشگفتار مؤلف بر چاپ انگلیسی کتاب

این مجلد شامل تقریباً مقداری از توپولوژی نقطه مجموعه است که دانستن آن برای یک دانشجو ضروری است ولو اینکه منظورش تخصص در این زمینه نباشد. مطالب آن، بخش کوچکی از تمامی موضوع است که اگر به شکل فشرده نوشته می‌شد، احتمالاً به‌صورت جزوهٔ کوچکی در می‌آمد. اما، باید بدانید که هدف ما صرفه‌جویی در گفتار و کاستن حجم کتاب نبوده است، بلکه ارائهٔ تصویری زنده از مفاهیم و اندیشه‌های موجود با استمداد از شهود خواننده، چه در استنباط مستقیم و چه در ادراک دقیق و عمیق این مفاهیم بوده است.

می‌خواهم از همهٔ کسانی که با اظهار نظر سودمند خویش، دربارهٔ چاپ آلمانی کتاب، و دستنویس اولیهٔ آن، مرا یاری نموده‌اند، به‌ویژه، از ی. بینگنر[1]، گی هیرش[2]، و ب. ساگرالوف[3] سپاسگزاری کنم. از تئودور بروکر[4]، به‌خاطر اهدای فصل آخر «نظریهٔ مجموعه‌ها»، و افزودن آن به کتابم، و سرانجام از سیلویو لوی[5]، مترجم کتاب از آلمانی به انگلیسی، متشکرم. معمولاً، مؤلفی که اثرش به زبان خارجی ترجمه شده است، صلاحیت داوری دربارهٔ اعتبار آن ترجمه را ندارد. اما، دست‌کم می‌توان به او اجازه داد که بگوید: آن‌را می‌پسندم.

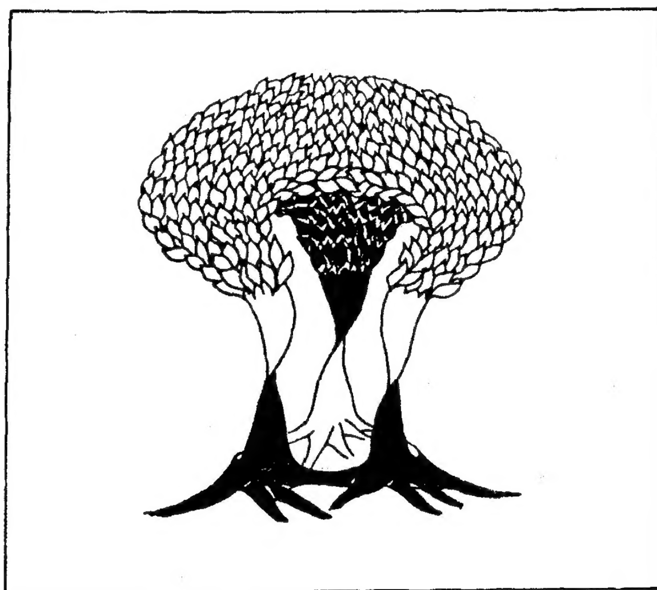
رگنز بورگ[6]، مه ۱۹۸۳

کلاوس ینیش[7]

---

1. J. Bingener
2. Guy Hirsch
3. B. Sagraloff
4. Theodor Bröker
5. Silvio Levy
6. Regensburg
7. Klaus Jänich

مقدمه

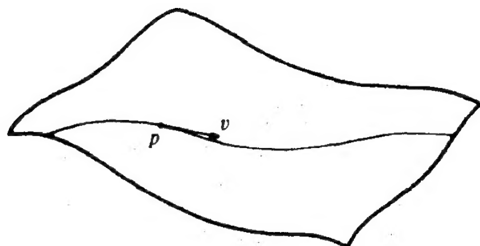


۱. توپولوژی نقطه ـ مجموعه چه می‌خواهد بگوید؟

یکی از مشخصات دانش نوین را، گاهی سطح تخصصی شدنِ خیلی زیاد ـ و روزافزون ـ آن می‌شمارند. همهٔ ما عبارت «فقط مشتی متخصص . . .» را شنیده‌ایم. اما، یک حکم کلی دربارهٔ پدیدهٔ پیچیده‌ای مانند «دانش نوین»، همواره اقبال آن‌را دارد که جزئی از حقیقت را در برگیرد، ولی در مورد جملهٔ کلیشه‌ای

بالا دربارهٔ تخصصی شدن، این مقدار حقیقت تاحدّی اندک است. شاید بهتر باشد که این نشانهٔ دانش جدید را، تداخل زیاد و روزافزون نظامهایی بدانیم که قبلاً به‌عنوان زمینه‌هایی جدا ازهم منظور می‌شدند. مثلاً، آنچه را که امروزه باید یک متخصص نظریهٔ اعداد و یک متخصص هندسهٔ دیفرانسیل مشترکاً بدانند، حتی اگر نسبی هم بگیریم، خیلی بیش از آن‌است که لازمهٔ پنجاه یا صد سال پیش بوده است. این تداخل رشته‌ها، ثمرهٔ این واقعیت است که رشد علمی، شباهتهای نهفته‌ای را پیوسته یکی پس از دیگری آشکار می‌سازد که استفادهٔ بعدی از آنها، رشد فکری عظیمی را پدید می‌آورد و موجب می‌شود که نظریهٔ مبتنی بر آنها خیلی زود به همهٔ زمینه‌های درگیر راه یابد و آنها را به‌هم پیوند دهد. توپولوژی نقطه ـ مجموعه، دقیقاً یک چنین نظریهٔ به‌اصطلاح پایه ـ شباهتی است که هر چه را که به‌طورکلّی بتوان دربارهٔ مفاهیم مربوط به «نزدیکی»، «همسایگی»، و «همگرایی» گفت، دربرمی‌گیرد ولو اینکه اغلب با مسامحه و عاری از دقت باشد.

قضایای یک نظریه، می‌توانند ابزارهای نظریهٔ دیگری باشند. مثلاً هنگامی‌که یک متخصص هندسهٔ دیفرانسیل (به‌عنوان کار هر روزه‌اش) از این واقعیت استفاده می‌کند که، از هر نقطه و برای هر امتداد، یک



و تنها یک ژئودزیک می‌گذرد، او دارد از قضیهٔ وجود و یکتایی برای دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم، استفاده می‌کند. اما، از سوی دیگر، موارد استعمال روزمرهٔ توپولوژیِ نقطه ـ مجموعه در زمینه‌های دیگر، نه بر قضایای خیلی ریشه‌دارِ آن، بلکه بر نیروی وحدت‌بخش و ساده‌ساز دستگاه مفاهیم توپولوژی، و مجموعهٔ اصطلاحاتی استوار است که در این رشته ماهرانه انتخاب شده است. برداشت من این است که این توان، از این سرچشمهٔ بسیار خاص که: توپولوژی نقطه مجموعه، تعداد فراوانی از مسائل کاملاً انتزاعی و اساساً غیر حسی دربارهٔ فضا را در دسترس تصورات ما قرار می‌دهد، نشأت می‌گیرد. موارد بسیاری در توپولوژی نقطه ـ مجموعه را می‌توان به‌روشی کاملاً مناسب در فضای فیزیکی معمولی مجسم کرد، حتی هنگامی‌که آنها عملاً در فضای فیزیکی رخ ندهند. تصور ما دربارهٔ فضا، که بدین ترتیب برای استدلال ریاضی دربارهٔ اشیاء مجرد بسیج می‌شود، نیروی ذهنی بسیار تکامل‌یافته‌ای است که از تفکر انتزاعی و منطقی مامستقل است. و این نیروکه قدرت‌بخش استعدادهای دیگر ریاضی ماست، دلیل بنیادی کارایی و سادگی روشهای توپولوژیک به‌شمار می‌آید.

۲. منشأ و آغاز

پیدایش مفاهیم بنیادی ریاضی، تقریباً همیشه، فرایندی دراز مدت و پیچیده بوده است. به‌طور قطع می‌توان بر یک مورد خاص و یک لحظهٔ معین تاریخ، انگشت گذاشت و چنین گفت: آن‌طوری‌که امروزه دریافته‌اند، این مفهوم در این زمان، برای بار نخست، به‌شکل روشن و قاطع تعریف شده، و از این زمان به‌بعد «وجود دارد»ـ اما، تا آن موقع، این مفهوم، مراحل مقدماتی چندی را پشت‌سر گذاشته بوده، و حالات ویژه و مهّم آن شناخته شده، و صورتهای گوناگونی از آن بررسی و احیاناً به دور انداخته شده بوده است، و . . .؛ و غالباً دشوار وگاهی غیرممکن است به‌درستی تعیین کرد که کدام ریاضیدان سهم قاطعی در پیشبرد آن داشته و باید به‌عنوان بنیانگذار این مفهوم به‌شمار آید.

با این مقدّمات، می‌توان گفت، که دستگاه مفاهیم توپولوژی نقطه ـ مجموعه، از زمان انتشار «مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها[1]»ی فلیکس هاوسدورف[2]، (لایپتسیک، ۱۹۱۴)، «وجود دارد». در فصل هفتم کتاب فوق، «مجموعه‌های نقاط در فضاهای کلی»، بنیادیترین مفاهیم توپولوژیِ نقطه ـ مجموعه، تعریف شده‌اند. پیش از او، موریس فرشه[3] در مقاله‌ای تحت عنوان «نکاتی از حساب تابعی»[4]، که در مجلّد ۲۲ مجلهٔ ایتالیایی (گزارش محفل ریاضی پالرمو)[5]، منتشر نموده، با وارد کردن مفهوم فضاهای متری و نیز سعی در به‌دست دادن تعریف فضاهای توپولوژیک (با بیان مفهوم همگرایی به روش اصل موضوعی)، به‌این نکته نزدیک شده بوده است. فرشه، نخست به فضاهای تابعی توجه داشته، و شاید بتوان او را بنیانگذار شاخهٔ آنالیز تابعی در توپولوژیِ نقطه ـ مجموعه به‌حساب آورد.

اما، ریشه‌های این موضوع، بدون شک عمیقتر از اینهاست. توپولوژی نقطه ـ مجموعه نیز، مانند بسیاری از شاخه‌های دیگر ریاضیات، بتدریج از تغییرات انقلابی مفهوم هندسه در طول قرن نوزدهم سر برآورد. در ابتدای این قرن، دیدگاه حاکم، همان دیدگاه کلاسیک بود که بر مبنای آن هندسه به‌صورت نظریهٔ فضای فیزیکی پیرامون ما مطرح می‌شد و اصول موضوعهٔ آن به‌عنوان واقعیتهای اولیهٔ بنفسه بدیهی، نگریسته می‌شدند. درپایان قرن، ریاضیدانان خود را از تنگنای این برداشت رهایی بخشیدند، و به‌خوبی روشن شد که از این پس، هندسه باید درپی هدفهای بسیار وسیعتری باشد، و (مانند بویوئی[6]، لباچفسکی[7]، ریمان[8]، پوانکاره[9]، و غیره ـ من در موقعیتی نیستم که بخواهم جریان این تکامل را در اینجا ترسیم کنم . . .) هندسه‌دانان باید به فضاهای مجرد، از قبیل خمینه‌های n بعدی[10]، فضاهای تصویری، رویه‌های ریمان، فضاهای تابعی و غیره، بپردازند. اما، اکنون لازم است که سهمِ برجستهٔ یکی دیگر از ابداعات قرن نوزدهم در پیدایش توپولوژی نقطه ـ مجموعه، یعنی کار کانتور را به فهرست این

---

1. Grundzüge der Mengenlehre 2. Felix Hausdorff 3. Maurice Fréchet
4. Sur quelques points du calcul fonctionnel 5. Rend. Circ. Mat. Palermo
6. Bolyai 7. Lobachevski 8. Riemann 9. Poincaré
10. n - dimensional manifolds

نمونه‌های غنی و متنوع بیفزاییم، مساهمتی که درکار با فضاهای مجرد کاملاً جای خود را بازکرده و از اهمیت زیاد برخوردار است. هاوسدورف کتابش را با این مضمون به کانتور اهدا می‌کند: «تقدیم به خالق نظریهٔ مجموعه‌ها، گئورگ کانتور[1] ، با تحسین توأم با سپاس».

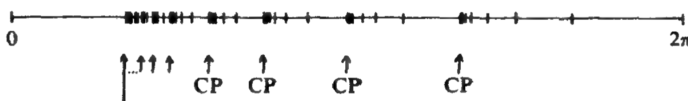
«یک فضای توپولوژیک، زوجی است متشکل از یک مجموعه و مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌هایش به‌گونه‌ای که . . .». بنابراین، آشکارا دیده می‌شود که بدون ورود مجموعه‌های مجرد به دنیای ریاضیات، که گسترش آن‌را مدیون کانتور هستیم، مفهوم فضای توپولوژیک را هیچ‌گاه نمی‌توانستیم با این کلیت دریابیم. اما، خیلی پیش از آنکه کانتور نظریهٔ مجموعه‌های ترامتناهی[2] خود را عرضه کند، در تکوین نقطه ـ مجموعه، راه کاملاً متفاوتی را پیموده بوده، که مایلم راجع به‌آن نکاتی را بیفزایم.

در ۱۸۷۰،کانتور نشان داده بودکه اگر دو سری فوریه[3] ، نقطه به نقطه، به یک تابع حدی همگرا باشند، ضرایب فوریهٔ آنها یکی خواهد بود. در ۱۸۷۱، وی این قضیه را بهبود بخشید، بدین ترتیب که ثابت کرد که وقتی همگرایی و برابری حدود، در همهٔ نقاط جز در یک مجموعهٔ متناهی استثناییِ $A \subset [o, ۲\pi]$ برقرار باشد، بازهم برابری ضرایب فوریه صادق است. در مقاله‌ای به‌سال ۱۸۷۲،کانتور به مسألهٔ تعیین همهٔ مجموعه‌های استثنایی نامتناهی که این یکتایی (یعنی برابری ضرایب سریها) برای آنها برقرار است، پرداخت.

البته، یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از $[o, ۲\pi]$، باید دست‌کم یک نقطهٔ انباشتگی[4] داشته باشد: در این



شکل، یک نمونهٔ به‌اصطلاح خیلی «طبیعی» از یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از $[o, ۲\pi]$ دیده می‌شود. یک مجموعهٔ «دور از ذهن‌تر»، می‌تواند چنان مجموعه‌ای باشد که نقاط انباشتگی‌اش خود یک نقطهٔ انباشتگی داشته باشند:



در این مورد،کانتور ثابت کرد که اگر دنبالهٔ زیرمجموعه‌های $[o, ۲\pi]$ به‌روش استقرایی توسط:

$$A^{o} := A$$

$$A^{n+۱} := \{x \in [o, ۲\pi] | \text{است } A^n \text{ یک نقطهٔ انباشتگی } x\}$$

1. Georg Cantor 2. transfinite set 3. Fourier series 4. cluster point

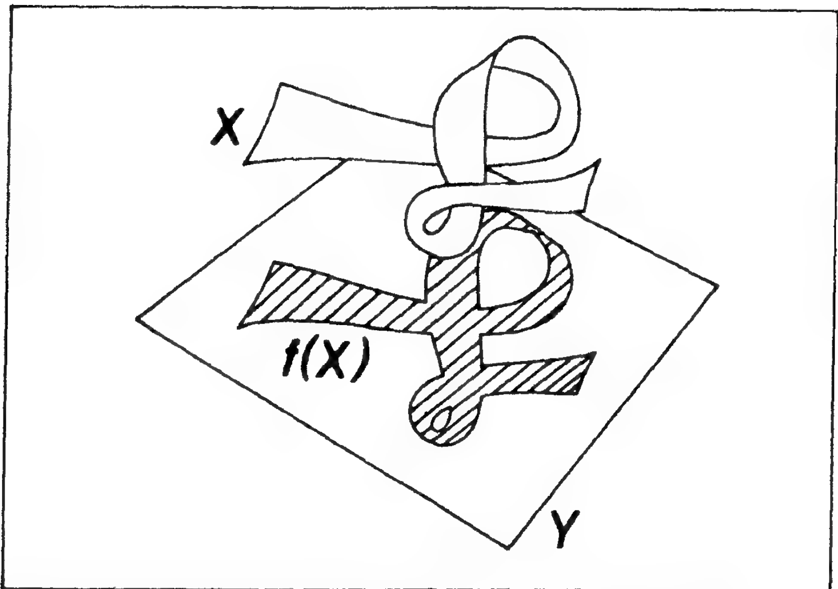
تعریف شود، و هرگاه این دنباله پس از چند جمله قطع شود، یعنی سرانجام، به‌ازای عدد طبیعی مناسبی چون k، تساوی $A^k = \varnothing$ برقرار باشد، آنگاه ویژگی یکتایی برای چنین مجموعهٔ استثنایی A، برقرار است. به‌ویژه، اگر f تابع غیر ثابتی باشد که در خارج چنین مجموعه‌ای صفر شود، نمی‌توان آن‌را با سری فوریه نمایش داد. این نتیجه، به‌ما کمک می‌کند تا به‌رفتار شگفت‌انگیز سری فوریه، و نشأت گرفتن انگیزهٔ کانتور، از آنالیز کلاسیک و بالمآل از فیزیک در ابداع نظریهٔ مجموعه‌ها، پی بریم. اما، به برکت این دریافت، کانتور به کشف نوع جدیدی از زیرمجموعه‌های $A \subset \mathbb{R}$ راه یافت، که می‌توان آن‌را به کلی مرموز تلقی کرد، خصوصاً هنگامی‌که مدّت زیادی طول می‌کشد تا دنبالهٔ A، A^1، A^2، . . . قطع شود. از این پس، زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، مانند موجوداتی که باید به‌خودی خود موضوع مطالعه قرارگیرند، پا به عرصهٔ وجود می‌نهند. از آن مهمتر این‌که، این مجموعه‌ها باید، به‌بیان امروزی، از دیدگاه توپولوژی بررسی شوند. کانتور در این مسیر به‌کارهایش ادامه داد و پس از مدتی، هنگامی‌که مجموعه‌های نقاط $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$ را به‌شکل کلی مطالعه می‌کرد، دیدگاه توپولوژیِ نقطه ـ مجموعه را وارد کرد، که اکنون هاوسدورف می‌توانست بنای خود را بر پایهٔ آن بسازد.

*

من نمی‌خواهم این احساس را به‌وجود آورم که کانتور، فرشه و هاوسدورف، تنها ریاضیدانانی بودند که، در گسترش و روشن کردن مفاهیم بنیادی توپولوژیِ نقطه ـ مجموعه، سهیم بوده‌اند. بحث مفصلتر و شرح جزئیات بیشتر در این موضوع، بیرون از ظرفیت این کتاب است. من تنها می‌خواستم یکی دو چشمهٔ ساده ولی روشن از آغاز پیدایش نظریهٔ مورد بحث این کتاب را، به‌گونه‌ای سطحی و به‌اختصار، ذکر کرده باشم.

۱

مفاهیم بنیادی



۱. مفهوم فضای توپولوژیک

تعریف. هر فضای توپولوژیک[1] عبارت است از یک زوج $(X, \mathcal{O})$ متشکل از یک مجموعهٔ X و یک

---

1. topological space

مجموعهٔ $\mathcal{O}$ از زیرمجموعه‌های X (به‌نام «مجموعه‌های باز»)[1]، به‌گونه‌ای‌که اصول موضوع زیر برقرارند:

اصل ۱. هر اجتماعی از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای است باز.

اصل ۲. اشتراک هر دو مجموعهٔ باز، مجموعه‌ای است باز.

اصل ۳. مجموعه‌های $\emptyset$ و X بازند.

در تعریف فوق، $\mathcal{O}$ توپولوژیِ[2] فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{O})$ نیز نامیده می‌شود. معمولاً، در قرارداد فوق، نماد توپولوژی را حذف نموده و فقط از یک فضای توپولوژیک X سخن به‌میان می‌آورند، همان کاری را که از این پس ما خواهیم کرد.

تعریف. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

۱) زیرمجموعهٔ $A \subset X$ را بسته[3] می‌گوییم هرگاه $X \backslash A$ باز باشد.

۲) زیرمجموعهٔ $U \subset X$ را یک همسایگی[4] نقطهٔ $x \in X$ می‌گوییم، هرگاه یک مجموعهٔ باز V موجود باشد به‌گونه‌ای که $x \in V \subset U$.

۳) فرض کنیم $B \subset X$ زیرمجموعهٔ دلخواهی باشد. نقطهٔ $x \in X$ را یک نقطهٔ درونی[5] یا بیرونیِ[6] مجموعهٔ B می‌نامیم هرگاه، به‌ترتیب B یا $X \backslash B$ یک همسایگی نقطهٔ x باشند؛ و آن‌را نقطهٔ مرزیِ[7] مجموعهٔ B می‌خوانیم هرگاه نه B و نه $X \backslash B$ هیچ‌کدام یک همسایگی x نباشند.

۴) مجموعهٔ $\mathring{B}$ متشکل از همهٔ نقاط درونی مجموعهٔ B را درون[8] B می‌نامیم.

۵) مجموعهٔ $\bar{B}$ متشکل از همهٔ نقاط X را که نقطه‌های بیرونی B نیستند، بستار[9] B می‌نامیم.

این مفاهیم، مفاهیم اساسی توپولوژی نقطه ـ مجموعه هستند. خواننده‌ای که برای نخستین‌بار با آنها برخورد می‌کند، باید برای آشنایی و تسلط برآنها، اندکی تمرین کند. یک‌بار که در توبینگن[10] هنوز دانشجو بودم، یکی از کسانی بودم که بایستی اوراق دانشجویان را تصحیح می‌کردم و به‌آنها نمره می‌دادم. مسائل مربوط به‌تمرینهایی بودند که پس‌از درس استاد راجع به‌همین مفاهیم بنیادی، بی‌درنگ به‌دانشجویان واگذار شده بود. در خود درس، ثابت شده بود که یک مجموعه باز است اگر، و تنها اگر، همهٔ نقاط آن درونی باشند. یکی از تمرینها چیزی بدین مضمون بود: نشان دهید که مجموعهٔ نقاط درونی یک مجموعه، همواره مجموعه‌ای است باز. یکی از دانشجویان مراجعه کرد و از ما پرسید که چرا استدلال اورا نپذیرفته‌ایم. استدلال او چنین بود: «مجموعهٔ نقاط درونی، فقط شامل نقاط درونی است (یک

1. open sets 2. topology 3. closed 4. neighborhood
5. interior point 6. exterior point 7. boundary point 8. interior
9. closure 10. Tübingen

تکرار معلوم بی‌چون و چرا)؛ بنابراین، مسأله بدیهی است». یکی دو مصحّح دیگر هم حضور داشتند. همه، با حرارت تمام، سعی کردیم این دانشجو را قانع کنیم که، وقتی از نقاط درونی صحبت می‌کنید، باید تصریح کنید که آنها نقاط درونی کدام مجموعه‌اند: اما فایده نداشت. وقتی دریافت که ما چه می‌خواهیم بگوییم، درحالی‌که به آرامی می‌گفت که ما مته به خشخاش گذارده‌ایم، دست از سر ما برداشت. چه جوابی داشتیم به او بدهیم؟

بنابراین، چنانچه در میان خوانندگان کتابم، افرادی هستند که در این رشته کاملاً تازه واردند، به آنها توصیه می‌کنم هم اکنون تحقیق کنند که: درون یک مجموعهٔ B، اجتماع همهٔ مجموعه‌های بازی است که مشمول B هستند، و بستار B اشتراک همهٔ مجموعه‌های بستهٔ شامل B است. به‌عنوان غذای فکری برای یک بعد از ظهر آرام، بگذارید ملاحظات زیر را نیز بیفزایم.

هریک از سه مفهومی که با استفاده از مجموعه‌های باز تعریف کردیم، یعنی «مجموعه‌های بسته»، «همسایگیها» و «بستار» می‌تواند باز بودن یک مجموعه را مشخص کند. درواقع، یک مجموعهٔ $B \subset X$ باز است اگر، و تنها اگر $X \backslash B$ بسته باشد، و یا اگر، و تنها اگر، B همسایگی هریک از نقاط خود باشد، و یا اگر، و تنها اگر، $X \backslash B$ برابر با بستار خودش باشد. بنابراین، دستگاه اصول موضوعهٔ معرّف یک فضای توپولوژیک، باید بر حسب هریک از مفاهیم فوق نیز، قابل بیان باشد، مثلاً:

تعریف دیگری از فضاهای توپولوژیک (اصول مجموعه‌های بسته). یک فضای توپولوژیک عبارت است از یک زوج $(X, \mathscr{A})$ متشکل از یک مجموعهٔ X و یک مجموعهٔ $\mathscr{A}$ از زیر مجموعه‌های X (به‌نام «مجموعه‌های بسته») به‌گونه‌ای که اصول زیر برقرارند:

A۱. هر اشتراک مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای است بسته.

A۲. اجتماع هر دو مجموعهٔ بسته، مجموعه‌ای است بسته.

A۳. مجموعه‌های X و $\varnothing$ بسته‌اند.

این تعریف جدید با تعریف پیشین هم ارز است، زیرا $(X, \mathcal{O})$ یک فضای توپولوژیک به معنی تعریف پیشین است، اگر و تنها اگر، $(X, \mathscr{A})$ یک فضای توپولوژیک به معنی تعریف جدید باشد، به‌شرط آنکه قرار دهیم $\mathscr{A} = \{X \backslash V | V \in \mathcal{O}\}$. چنانچه تعریف دوم را نخست مطرح می‌کردیم، بسته‌بودن به عنوان مفهوم اولیه مطرح می‌شد و باز بودن از این تعریف که $X \backslash V$ باز است اگر و فقط اگر $V \subset X$ بسته باشد، نتیجه می‌شد. اما، تعریف مفاهیم (۲) تا (۵)، تغییر نمی‌کرد و دستگاه مفاهیمی که در پی آن می‌آمد، همان می‌شد که در آغاز آورده بودیم. چنین متداول شده است که توپولوژی را با مجموعه‌های باز آغاز می‌کنند، اما مفهوم همسایگی محسوستر به‌نظر می‌رسد و بر همین مبنا بود که

هاوسدورف این مفاهیم را در آغاز تعریف کرده بود.

تعریفی دیگر (اصول همسایگی). یک فضای توپولوژیک عبارت است از یک زوج $(X, \mathfrak{A})$ متشکل از یک مجموعهٔ X و یک خانوادهٔ $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_x\}_{x\in X}$، که مجموعه‌های $\mathfrak{A}_x$، زیرمجموعه‌های X (به‌نام «همسایگیهای x») هستند، به‌گونه‌ای که:

N۱. هر همسایگی x شامل x است، و X همسایگی هر یک از نقاط خودش است.

N۲. اگر $V \subset X$ شامل یک همسایگی نقطهٔ x باشد، خود V یک همسایگی x است.

N۳. اشتراک هر دو همسایگی نقطهٔ x، یک همسایگی نقطهٔ x است.

N۴. هر همسایگی نقطهٔ x شامل یک همسایگی نقطهٔ x است که یک همسایگی هر یک از نقاط خودش نیز هست.

دیده می‌شود که بیان توپولوژی برحسب این اصول، اندکی پیچیده‌تر از بیان آن توسّط مجموعه‌های باز است. اما، مشخّص‌کردن توپولوژی به‌کمک عمل بستار، از ظرافت خاصی برخوردار است، و اصول آن اصول بستار نام دارد:

تعریفی دیگر (اصلهای موضوع بستارکوراتوفسکی[1]). یک فضای توپولوژیک عبارت است از زوجی مانند $(X, ^-)$ متشکل از یک مجموعهٔ X، و یک نگاشت $^- : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ از مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های X به خودش، به‌گونه‌ای که:

C۱. $\overline{\varnothing} = \varnothing$

C۲. برای هر $A \subset X$، $A \subset \overline{A}$

C۳. برای هر $A \subset X$، $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

C۴. برای هر $A \in X$ و هر $B \in X$، $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

بیان معنی دقیق هم‌ارزی این تعاریف، و سپس اثبات این هم‌ارزی، همان‌طور که گفتیم، به‌عنوان تمرین، به خوانندهٔ تازه وارد در توپولوژی واگذار می‌شود. ما به تعریف اول، تکیه خواهیم کرد.

۲. فضاهای متری

چنان‌که می‌دانیم، در توپولوژی معمولی، یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ را باز می‌نامیم هرگاه هر نقطهٔ آن مرکز

1. Kuratowski closure axioms

گویی مشمول همان مجموعه باشد. این تعریف را می‌توانیم به‌گونه‌ای طبیعی تعمیم دهیم هرگاه به‌جای $\mathbb{R}^n$ یک مجموعهٔ X که در آن مفهوم فاصله[1] تعریف شده باشد، قرار دهیم. به‌ویژه، چنین فضایی، همیشه یک فضای توپولوژیک پدید می‌آورد. تعریف زیر را یادآوری کنیم:

تعریف (فضای متری). یک فضای متری[2] عبارت است از یک زوج (X, d) ملاتشکل از یک مجموعهٔ X و یک تابع حقیقی $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (به‌نام «متریک»[3]) به‌گونه‌ای که:

M۱. برای هر $x \in X$ و هر $y \in X$، $d(x, y) \geqslant o$؛ و $d(x, y) = o$، اگر و تنها اگر $x = y$.

M۲. برای هر $x \in X$ و هر $y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$.

M۳. (نابرابری مثلثی[4]). برای هر $x, y, z \in X$،

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

تعریف (توپولوژی یک فضای متری). فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. یک زیر مجموعهٔ $V \subset X$ را بازگوییم هرگاه به‌ازای هر نقطهٔ $x \in X$ عددی مانند $\varepsilon > o$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که گوی[5] به مرکز x و شعاع ε، یعنی

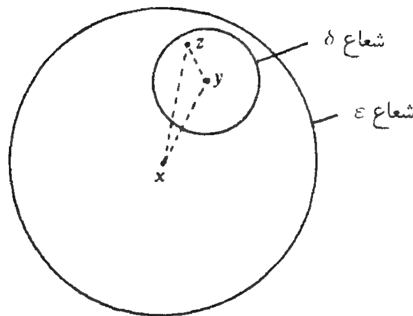
$$K_\varepsilon(x) := \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$$

نیز مشمول V باشد. مجموعهٔ $\mathcal{O}(d)$ متشکل از همهٔ مجموعه‌های باز X را توپولوژیِ فضای متری (X, d) می‌نامند.

بنابراین $(X, \mathcal{O}(d))$ واقعاً یک فضای توپولوژیک است: بار دیگر، برای خوانندهٔ مبتدی فرضی ما، این فرصت مغتنم پیش آمده است، که به تمرین بپردازد. اما در این مورد، حتی خوانندهٔ با تجربه‌تر هم شاید به پشتی صندلی خود تکیه دهد و چند ثانیه‌ای متفکّرانه بهِ نقطه‌ای مبهم خیره شود که به راستی نقش نابرابری مثلثی در این میان چیست؟

خوب، چه می‌گویید؟ باشد، فرض کنید بپذیریم که هیچ نقشی نداشته باشد. اما، به محض آنکه بخواهیم با این فضاهای توپولوژیک $(X, \mathcal{O}(d))$ کار کنیم، فایدهٔ آن آشکار می‌شود. مثلاً، نابرابری مثلثی اجازه می‌دهد تا مشابه این نتیجهٔ آشنا را در فضای $\mathbb{R}^n$ به‌دست آوریم، که می‌گوید: به‌ازای هر نقطهٔ y که $d(x, y) < \varepsilon$، یک گوی کوچک به شعاع δ شامل y وجود دارد، که کاملاً مشمول گوی به مرکز x و شعاع ϵ باشد.

1. distance 2. metric space 3. metric 4. triangle inequality
5. ball

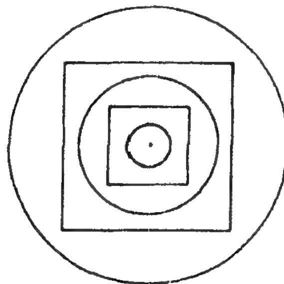


بنابراین، یک «گوی باز»[1] $\{y|d(x,y) < \varepsilon\}$ واقعاً باز است، و از آنجا معلوم می‌شود که یک زیرمجموعهٔ $U \subset X$ یک همسایگی x است اگر و تنها اگر شامل گویی به مرکز x باشد.

در برخی شرایط، ممکن است متریکهایی بس متفاوت، توپولوژی واحدی را القا کنند. اگر d و d' متریکهایی بر مجموعهٔ X باشند و اگر هر گوی باز حول x در متریک d شامل یک گوی باز حول x در متریک d' باشد، بی‌درنگ می‌بینیم که هر مجموعهٔ باز در d، یک مجموعهٔ باز در d' است، یعنی $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$. بعلاوه، اگر عکس این مطلب نیز درست باشد، هر دو توپولوژی یکی هستند، یعنی $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$. یک مثال، حالتی است که $X = \mathbb{R}^۲$، و

$$d(x,y) := \sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + (x_۲ - y_۲)^۲}$$

$$d'(x,y) := \max\{|x_۱ - y_۱|, |x_۲ - y_۲|\} :$$



در اینجا، یک ترفند ساده، اما آموزنده هست، که حقاً بجاست در آغاز مورد توجه قرار گیرد، ترفندی که، مانند یک طلسم واقعی، در مقابل برخی از فرضیات غلط که ممکن است در ارتباط دو جانبه بین متریک و توپولوژی مطرح شود، عمل می‌کند: اگر (X,d) یک فضای متری باشد، فضای (X,d') نیز که با ضابطهٔ

---
1. open ball

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{(1 + d(x,y))}$$

تعریف می‌شود، یک فضای متری خواهد بود؛ و به‌علاوه، بی‌درنگ ثابت می‌شود که $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$! اما، از آنجا که همهٔ فاصله‌ها در متریک d' کمتر از ۱ هستند، از آنجا نتیجه می‌شود که به‌ویژه اگر تصادفاً متریکی کراندار باشد، این کراندار بودن به هیچ وجه نمی‌تواند یک ویژگی ناشی از توپولوژی آن باشد.

تعریف (فضاهای متریکپذیر). یک فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{O})$ را متریکپذیر گویند هرگاه یک متریک d وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}$.

چگونه می‌توان تعیین کرد که یک فضای توپولوژیک متریکپذیر هست یا نیست؟ پاسخ این پرسش، با «قضایای متری‌سازی»، که قضایایی در مبحث توپولوژی نقطه ـ مجموعه هستند، داده می‌شود. آیا می‌توان گفت که همهٔ فضاهای توپولوژیک، جز تعداد اندکی از آنها، متریکپذیرند؟ یا بعکس، متریکپذیری، یک حالت ویژه و نادر است؟ جواب، نه این‌است و نه آن. اما، شاید حدس اول به واقعیت نزدیکتر باشد، بدین معنی که فضاهای متریکپذیر فراوانی وجود دارند. در این کتاب، به قضایای متری‌سازی نخواهیم پرداخت. اما، با مطالب فصلهای ۱ و ۶ و ۸ این کتاب، خواننده برای پیگیری بیشتر این مسأله، کاملاً آماده خواهد شد.

۳. زیرفضاها، اجتماعهای جدا از هم و حاصلضربها

چه بسا به فضاهای توپولوژیک جدیدی بر می‌خوریم که از فضاهای قدیمی ساخته شده‌اند. ما در اینجا، سه نمونه از ساده‌ترین و مهمترین این ساختمانها را مطرح می‌کنیم.

تعریف (زیرفضا). اگر $(X, \mathcal{O})$ یک فضای توپولوژیک و $X_o \subset X$ یک زیرمجموعهٔ X باشد، توپولوژی $\mathcal{O}|X_o$ روی X_o را که با ضابطهٔ

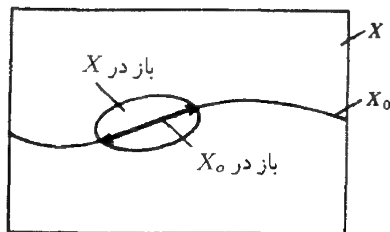
$$\mathcal{O}|X_o := \{U \cap X_o | U \in \mathcal{O}\}$$

تعریف می‌شود، توپولوژی القایی[1] یا توپولوژی زیرفضایی می‌نامند و فضای توپولوژیک $(X_o, \mathcal{O}|X_o)$ را یک زیرفضای[2] $(X, \mathcal{O})$ می‌خوانند.

در ذیل، جملهٔ کوتاهتر «باز در X_o» را به‌جای جملهٔ طولانی «باز نسبت به توپولوژی X_o»، به‌کار

1. induced topology 2. subspace

می‌بریم، و بنابراین، یک زیرمجموعهٔ $B \subset X_o$، در X_o را بازگوییم اگر و تنها اگر، اشتراک X_o با یک مجموعهٔ باز در X باشد:



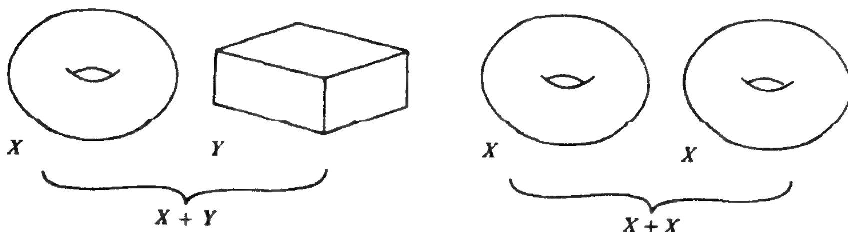
بنابراین، چنین مجموعه‌هایی را نباید با مجموعه‌های «باز و در X_o» اشتباه کرد، زیرا مجموعه‌های باز در X_o، الزامی ندارند که، به‌طور مطلق، یعنی در توپولوژی X، باز باشند.

تعریف (اجتماع جدا از هم مجموعه‌ها). اگر X و Y دو مجموعه باشند، اجتماع جدا از هم[1] یا حاصلجمع[2] آنها به کمک یک ترفند صوری، مثلاً به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$X + Y := X \times \{o\} \cup Y \times \{۱\}$$

ـ اما، بی‌درنگ کار با X و Y را به‌صورت زیرمجموعه‌هایی از $X + Y$، طبق روال معمول آغاز می‌کنیم[3].

از جنبهٔ شهودی، این عمل چیزی جز پهلوی هم قراردادن یک نسخه از X و یک نسخه از Y نیست، و واضح است که نمی‌توان آن‌را به شکل $X \cup Y$ نوشت، زیرا اصلاً هیچ معلوم نیست که X و Y جدا از هم بوده باشند. مثلاً، چنانچه $X = Y$، خواهیم داشت $X \cup X = X$ که فقط یک نسخه از X است.



1. disjoint union 2. sum

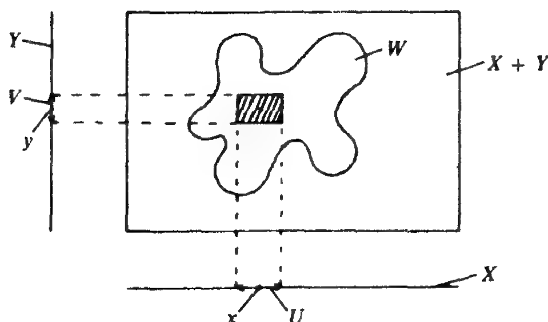
۳. منظور آن‌است که به $x \in X$ عضو (x, o) از $X + Y$، و به $y \in Y$ عضو $(y, ۱)$ از $X + Y$ را وابسته می‌کنیم. ـ م.

تعریف (اجتماع جدا از هم فضاهای توپولوژیک). اگر $(X, \mathcal{O})$ و $(Y, \widetilde{\mathcal{O}})$ فضاهای توپولوژیک باشند، روی حاصلجمع $X + Y$ توپولوژی جدید

$$\{U + V | U \in \mathcal{O}, V \in \widetilde{\mathcal{O}}\}$$

را درنظر می‌گیریم، و مجموعهٔ $X + Y$ با این توپولوژی را اجتماع جدا از هم توپولوژیک[1] فضاهای X و Y می‌نامیم.[2]

تعریف (توپولوژی حاصلضربی). فرض کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند. یک زیرمجموعهٔ $W \subset X \times Y$ را در توپولوژی حاصلضربی باز[3] گوییم هرگاه به‌ازای هر $(x, y) \in W$ یک همسایگی x در X مانند U و یک همسایگی y در Y مانند V وجود داشته باشند، به‌قسمی که $U \times V \subset W$. مجموعهٔ $X \times Y$ مجهز به توپولوژی فوق را، حاصلضرب (دکارتی) فضاهای X و Y می‌نامیم.



تصویر ذهنی حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ها، و یا فضاهای توپولوژیک، معمولاً به‌وسیلهٔ یک مستطیل ☐ داده می‌شود، و تا جایی که با موارد خیلی پیچیده سروکار نداشته باشیم، این تصویر کاملاً مناسب است. حاصلضربهایی به شکل

$$U \times V \subset X \times Y$$

را که در آن $U \subset X$ و $V \subset Y$ مجموعه‌های بازند، مستطیلهای باز[4] می‌نامیم. روشن است که مستطیلهای باز، درتوپولوژی حاصلضربی بازند. اما، مجموعه‌های باز، تنها منحصر به آنها نمی‌شوند: این مجموعه‌ها به خودی خود یک توپولوژی نمی‌سازند، زیرا اجتماع دو مستطیل در حالت کلی یک

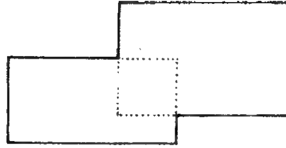
1. topological disjoint union

۲. حاصلجمع توپولوژیک *topological sum* نیز نامیده می‌شود. ـ م.

3. open in the product topology

4. open boxes

مستطیل نیست:



این ملاحظهٔ پیش پاافتاده، از آنجا به ذهن من خطور کرده است که بارها شاهد ابراز عقیدهٔ گمراه‌کننده و مخالف آن بوده‌ام، که گویا جاذبهٔ غریبی دارد. بله، فعلاً که چنین است.

۴. پایه‌ها و زیر پایه‌ها

تعریف (پایه). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. یک مجموعهٔ $\mathfrak{B}$ از مجموعه‌های باز را یک پایه[1] برای توپولوژی فضا می‌نامیم هرگاه هر مجموعهٔ باز اجتماعی از مجموعه‌های عضو $\mathfrak{B}$ باشد.

به‌عنوان مثال، مستطیلهای باز یک پایه برای توپولوژی حاصلضربی تشکیل می‌دهند، و گویهای باز $\mathbb{R}^n$ یک پایه برای توپولوژی معمولی $\mathbb{R}^n$. اما به‌خاطر بسپارید که مجموعهٔ گویهایی با شعاع گویا و مختصات مرکز گویا (که مجموعه‌ای شماراست!) نیز یک پایه برای توپولوژی $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف (زیر پایه). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. یک مجموعهٔ $\mathfrak{S}$ از مجموعه‌های باز را یک زیر پایه[2] برای توپولوژی فضا می‌نامیم هرگاه هر مجموعهٔ باز، اجتماعی از اشتراکهای متناهی مجموعه‌های عضو $\mathfrak{S}$ باشد.

البته، واژهٔ «متناهی» در اینجا بدان معنی نیست که اشتراک موردنظر باید مجموعه‌ای متناهی باشد، بلکه منظور اشتراک تعدادتناهی از مجموعه‌هاست. در اینجا اشتراک صفر تا مجموعه (یعنی اشتراک خانواده‌ای تهی از مجموعه‌ها)[3] نیز منظور شده است، که با یک قرارداد معقول، برابر با کل فضا تعریف می‌شود (زیرا، بدین طریق، دستورهای

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \cap \bigcap_{\mu\in M} S_\mu = \bigcap_{\nu\in\Lambda\cup M} S_\nu$$

معتبر می‌مانند)، به‌شیوهٔ مشابه، اجتماع یک خانوادهٔ تهی از مجموعه‌ها نیز، به‌نحوی مناسب برابر با مجموعهٔ تهی تعریف می‌شود.

---

1. basis 2. subbasis

۳. منظور از مجموعه‌ها فقط زیرمجموعه‌های فضای مفروض X است، وگرنه منطقاً دچار تناقض می‌شویم. ــ م.

با این قراردادها، می‌بینیم که اگر X مجموعه‌ای دلخواه و $\mathfrak{S}$ مجموعهٔ دلخواهی از اجزای X باشد، دقیقاً یک و تنها یک توپولوژی روی X مانند $\mathcal{O}(\mathfrak{S})$ هست، که $\mathfrak{S}$ یک زیر پایه برای $\mathcal{O}(\mathfrak{S})$ (توپولوژی «پدیدآمده[1]» به‌وسیلهٔ $\mathfrak{S}$) است. این $\mathcal{O}(\mathfrak{S})$ دقیقاً متشکل از اجتماعهای اشتراکهای متناهی مجموعه‌های عضو $\mathfrak{S}$ است.

بنابراین، یک توپولوژی را می‌توان با مشخص‌کردن یک زیر پایه تعریف کرد. اما ببینیم به چه دلیل می‌خواهند چنین کنند؟ خوب، علت آن است که غالباً می‌خواهند یک توپولوژی بسازند که در شرایط معینی صدق کند. یکی از این شرایط، معمولاً به ریزبافتی[2] توپولوژی برمی‌گردد. اگر $\mathcal{O}$ و $\mathcal{O}'$ توپولوژیهائی بر X باشند، و $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$، می‌گویند $\mathcal{O}'$ ریز بافت‌تر از $\mathcal{O}$ است، و $\mathcal{O}$ درشت بافت‌تر[3] از $\mathcal{O}'$. اغلب، به‌دلایلی، درپی یافتن توپولوژیی هستیم که، تا جایی که ممکن است ریز بافت‌تر، یا درشت بافت‌تر باشد. مسلماً، یک توپولوژی روی X وجود دارد که از همه درشت بافت‌تر است، که اصطلاحاً توپولوژی بیمایه[4] نامیده می‌شود، و تنها شامل مجموعه‌های X و $\varnothing$ است. هم‌چنین، یک توپولوژی روی X وجود دارد که از همه ریز بافت‌تر است و در آن همهٔ زیرمجموعه‌های X بازند، و توپولوژی گسسته[5] نامیده می‌شود. اما این کافی نیست، زیرا می‌خواهیم شرایط دیگری نیز برای توپولوژی قائل شویم. در مواردی خاص، توپولوژی مطلوب باید از سویی تا آنجا که ممکن است درشت بافت باشد، و از سوی دیگر، دست‌کم شامل مجموعه‌های عضو $\mathfrak{S}$ باشد. همیشه چنین توپولوژیی وجود دارد، و آن‌هم دقیقاً $\mathcal{O}(\mathfrak{S})$ی ماست.

۵. نگاشتهای پیوسته

تعریف (نگاشتهای پیوسته). فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. یک نگاشت $f : X \to Y$ را پیوسته[6] می‌نامیم، هرگاه نگارهٔ وارون[7] مجموعه‌های باز در آن همواره باز باشند.

یادداشت. نگاشت همانی $id_X : X \to X$ پیوسته است، همچنین، اگر نگاشتهای $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ پیوسته باشند، نگاشت $gof : X \to Z$ نیز پیوسته خواهد بود.

با تعریف اخیر، مهمترین مطلبی را که می‌خواستیم گفتیم. اگر این مفهوم برای شما تازگی دارد، توصیه می‌کنم دو تمرین زیر را، که فایدهٔ عملی دارند، انجام دهید. نخستین تمرین این‌است که تلاش کنید نگاشتهای پیوسته را به‌کمک تعریفهای دیگر فضاهای توپولوژیک، که در بخش ۱ آوردیم، مشخص کنید، یعنی، نشان دهید که یک نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است، اگر و تنها اگر، نگارهٔ وارون هر مجموعهٔ بسته در آن، یک مجموعهٔ بسته باشد؛ همچنین، اگر و تنها اگر، نگارهٔ وارون هر همسایگی در آن،

1. generated 2. fineness 3. coarser 4. trivial 5. discrete
6. continuous 7. inverse image

یک همسایگی باشد (دقیقتر بگوییم، اگر U یک همسایگی $f(x)$ باشد، $f^{-1}(U)$ هم یک همسایگی x باشد)؛ و یا، اگر و تنها اگر، برای هر زیرمجموعهٔ $B \subset X$، حکم $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ برقرار باشد. بعلاوه، چنانچه پیوستگی را برحسب همسایگیها مشخص کنیم، در حالت خاص فضاهای متری، سخن به‌تعریف قدیمی «به‌ازای هر $\varepsilon > o$ یک $\delta > o$یی هست که ...» کشیده می‌شود.

دومین تمرینی که سفارش می‌کنم، تمرین دربارهٔ زیرفضاها، اجتماعهای جدا از هم، و حاصلضربهاست، که متضمن اثبات سه نکتهٔ زیر است:

نکتهٔ ۱. اگر $f : X \to Y$ پیوسته و $X_o \subset X$ یک زیرفضا باشد، آن‌گاه تحدید $f|X_o : X_o \to Y$ نیز پیوسته است.

نکتهٔ ۲. نگاشت $f : X + Y \to Z$ پیوسته است، اگر و تنها اگر $f|X$ و $f|Y$ هر دو پیوسته باشند.

نکتهٔ ۳. نگاشت $(f_1, f_2) : Z \to X \times Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر نگاشتهای، $f_1 : Z \to X$ و $f_2 : Z \to Y$ هر دو پیوسته باشند.

ضمناً این را هم بگوییم که ویژگیهای مذکور در نکته‌های ۲ و ۳، توپولوژی اجتماع مستقیم، و توپولوژی حاصلضرب را کاملاً مشخص می‌کنند.

تعریف (همسانریختی). یک نگاشت دوسویی (پوشا و یک‌به‌یک) $f : X \to Y$ را یک همسانریختی[1] گویند هرگاه نگاشتهای f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند. یعنی وقتی‌که $U \subset X$ باز باشد، اگر و تنها اگر $f(U) \subset Y$ باز باشد.

فرض کنید یک ویژگی توپولوژیک (یعنی یک ویژگی قابل بیان برحسب مجموعه‌های باز) روی X یا روی یک زیرمجموعهٔ $A \subset X$ برقرار باشد. دراین‌صورت، اگر f ویژگی همسانریختی داشته باشد، عین همین ویژگی را باید Y یا زیرمجموعهٔ متناظر با آن، یعنی $f(A)$، نیز دارا باشد. چند نمونه:

$A \subset X$ بسته است $\Longleftrightarrow$ $f(A) \subset Y$ بسته است؛

$U \subset X$ یک همسایگی x است $\Longleftrightarrow$ $f(U) \subset Y$ یک همسایگی $f(x)$ است؛ $\mathfrak{B}$ یک پایه برای توپولوژی فضای X است $\Longleftrightarrow$ $\{f(B)|B \in \mathfrak{B}\}$ یک پایه برای توپولوژی فضای Y است؛ وقس‌علیهذا. بنابراین، نقش همسانریختی در توپولوژی، همانند نقش یکریختیهای خطی[2] در جبر

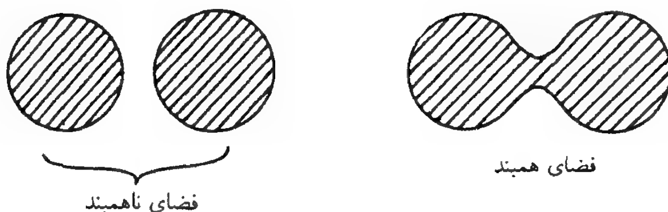
1. homeomorphism 2. linear isomorphisms

خطی، و یا نقش نگاشتهای دوسوتمامریخت[1] در نظریهٔ توابع تحلیلی مختلط، و یا نقش یکریختیهای گروهی[2] در نظریهٔ گروهها، و یا نقش طولپاییها[3] در هندسهٔ ریمانی است. به‌این دلیل، نمادگذاری $f : X \overset{\cong}{\to} Y$ را برای همسانریختی نیز به‌کار می‌بریم، و همچنین، نماد $X \cong Y$ را برای دو فضای همسانریخت[4] (یعنی دوفضایی که یک همسانریختی از یکی به دیگری موجود باشد) به‌کار می‌بریم.

تاکنون، تعداد بسیار اندکی از ویژگیهای فضاهای توپولوژیک را نام برده‌ایم. از میان ویژگیهای فراوان موجود، در این فصل که به «مفاهیم بنیادی» اختصاص دارد، سه‌ویژگی را که اهمیت بسزایی دارند، و از لحاظ خصوصیت خیلی با هم متفاوت‌اند، برگزیده‌ام، این سه‌ویژگی عبارت‌اند از: همبندی[5]، هاوسدورفی[6] و فشردگی[7]، که در باب آنها، در سه بخش آینده گفتگو خواهیم کرد.

۶. همبندی

تعریف (همبندی). یک فضای توپولوژیک را همبند[8] خوانیم هرگاه اجتماع دو زیرفضای ناتهیِ باز و جدا از هم نباشد. به‌عبارت دیگر، کل فضا و مجموعهٔ تهی تنها زیرمجموعه‌هایی باشند که در آنِ واحد هم باز باشند و هم بسته.



مثال. یک بازهٔ[9] (باز، نیم‌باز، بسته) $I \subset \mathbb{R}$ همواره مجموعه‌ای است همبند. این مثال، هر چند ساده است، فایدهٔ خاصی دارد، زیرا همبندی فضاهای پیچیده در بسیاری از موارد، نهایتاً نتیجه‌ای از همبندی بازه است. از این‌رو، برهان همبندی بازه را به اختصار تکرار می‌کنیم: فرض کنید $I = A \cup B$ و $A \cap B = \varnothing$ و A و B مجموعه‌هایی باز و ناتهی در توپولوژی زیرفضای $I \subset \mathbb{R}$ باشند. نقاط $a \in A$ و $b \in B$ را در نظر می‌گیریم (می‌توانیم فرض کنیم که $a < b$). فرض می‌کنیم s برابر با $\inf\{x \in B | a < x\}$ باشد. بنابراین، با توجه به تعریف inf، هر همسایگی s شامل نقاطی از B خواهد بود. اما، هر همسایگی s باید شامل نقاطی از A نیز باشد، زیرا، اگر s برابر a نباشد، الزاماً $a < s$ و درنتیجه $A \supset (a, s)$. پس، s نه می‌تواند نقطه‌ای از A باشد و نه نقطه‌ای از B. اما، این یک تناقض است، زیرا $s \in A \cup B$ و A و B هر دو مجموعه‌هایی بازند. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

1. biholomorphic maps 2. group isomorphisms 3. isometries
4. homeomorphic 5. connectedness 6. Hausdorffness 7. compactness
8. connected 9. interval

مثال. زیرفضای $X = [o, ۱] \cup (۲, ۳)$ در $\mathbb{R}$ همبند نیست. زیرا، می‌توان آن‌را به دو مجموعهٔ باز ناتهی $A = [o, ۱]$ و $B = (۲, ۳)$ تجزیه کرد. (ایراد: روشن است که $X = A \cup B$، و A و B جدا از هم‌اند. اما آیا «باز» هم هستند؟ مگر نه این‌است که A بالأخره یک بازهٔ بسته است!! شاید واقعاً دردآور باشد که یک بازهٔ بسته را باز بنامیم. اما، بابا، فراموش نکنید که ما داریم از توپولوژی X صحبت می‌کنیم و نه از توپولوژی $\mathbb{R}$! ...).

مفهوم همبندی به چه درد می‌خورد؟ خوب، یکی آنکه، روشی خام برای تمیز فضاهای توپولوژیک از یکدیگر به‌دست می‌دهد: چنانچه یکی از دو فضا همبند باشد و دیگری نباشد، دراین‌صورت این دو فضا نمی‌توانند همسانریخت باشند. گذشته از آن، حکم زیر نیز درست است: اگر X فضایی همبند، و Y یک مجموعه و $f : X \to Y$ یک نگاشت موضعاً ثابت باشد (یعنی برای هر نقطهٔ $x \in X$، یک همسایگی مانند U_x وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که تحدید f به U_x، $f|U_x$، ثابت باشد) آنگاه f برتمام حوزه‌اش، X، ثابت است. زیرا، اگر y نقطه‌ای در نگارهٔ f باشد، مجموعه‌های $A = \{x|f(x) = y\}$ و $B = \{x|f(x) \neq y\}$، هر دو بازند و درنتیجه، به‌دلیل همبندی X، داریم $X = A$. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت‌کنیم. معمولاً، نتیجهٔ فوق را در حالتی که $Y = \{$نه ,آری$\}$، یا $Y = \{$نادرست ,درست$\}$، به‌شکل زیر به‌کار می‌بریم: فرض‌کنیم X همبند و P یک ویژگی باشد که نقاط X می‌توانند داشته یا نداشته باشند، و فرض‌کنیم که می‌خواهیم ثابت‌کنیم همهٔ نقاط X دارای ویژگی P هستند. دراین‌صورت، کافی است سه حکم زیر را ثابت‌کنیم:

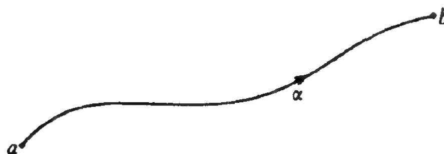
۱) دست‌کم یک نقطه با ویژگی P وجود دارد؛

۲) اگر x دارای ویژگی P باشد، همهٔ نقاط در یک همسایگی بس کوچک x نیز این ویژگی را دارند؛

۳) اگر x دارای ویژگی P نباشد، همهٔ نقاط در یک همسایگی بس کوچک x نیز ویژگی P را ندارند.

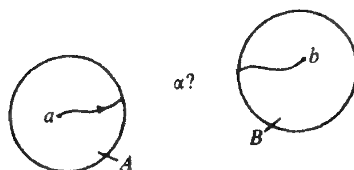
مفهوم قویتر زیر غالباً مورد نیاز است:

تعریف (همبند ـ راهی). فضای توپولوژیک X را همبند ـ راه[1] گوییم هرگاه هر دو نقطهٔ $a, b \in X$ با یک راه[2] به هم مربوط شوند، یعنی یک نگاشت پیوسته مانند $\alpha : [o, ۱] \to X$ موجود باشد به‌گونه‌ای که $\alpha(o) = a$ و $\alpha(۱) = b$:

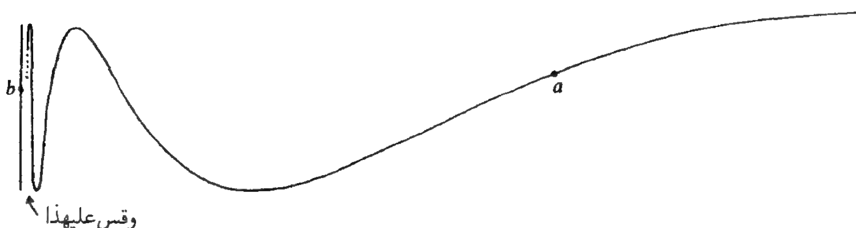


1. path-connected 2. path

بی درنگ دیده می‌شود که یک فضای همبند ـ راه X یک فضای همبند است: اگر A و B مجموعه‌های ناتهی باز و جدا از هم باشند و $X = A \cup B$، آنگاه، به‌علت همبندی $[o, ۱]$، نمی‌توان راهی از $a \in A$ به $b \in B$ پیدا کرد (در غیر این صورت، می‌بایست $[o, ۱]$ را به شکل $[o, ۱] = \alpha^{-۱}(A) \cup \alpha^{-۱}(B)$ نوشت، والی آخر).



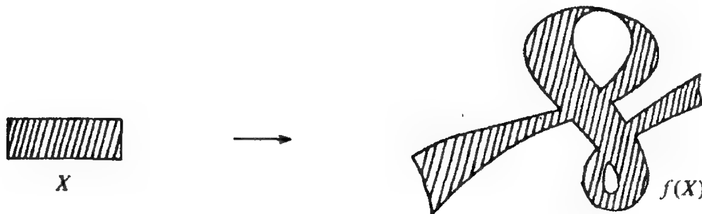
عکس این مطلب درست نیست، زیرا: یک فضا ممکن است همبند باشد، اما در عین حال راه عبوری از یک نقطه به نقطهٔ دیگر نداشته باشد. زیرفضای $\mathbb{R}^n$ با تعریف: $\{(x, \sin \ln x) | x > o\} \cup (o \times [-۱, ۱])$ نمونه‌ای از این نوع فضاهاست:



در خاتمه، اجازه بدهید دربارهٔ رفتار همبندی تحت اعمال گوناگون، سه نکته را به‌گفته‌های پیش بیفزاییم. ویژگیهای توپولوژیک، از قبیل همبندی، وقتی شناخت عمیقتری نسبت به آنها پیدا کنیم، حساسیت شدیدی در ما پدید می‌آورند: برخی مساعد و مفید جلوه می‌کنند، زیرا بارها نشان داده‌اند که چگونه می‌توانند استدلالها را آسان کنند، و یا حتی از همان ابتدا استدلال را ممکن سازند؛ بعضی، برعکس، به‌دلیل کاملاً مخالف آن، ما را می‌ترسانند. تا اندازهٔ زیادی درست است که بگوییم، یک ویژگی که «خوب» به‌شمار آمده است، ممکن است اتفاقاً مشکلی ایجاد کند، و بسیاری از ویژگیها گاهی خوب هستند و گاهی خوب نیستند. اما، من می‌توانم به شما اطمینان دهم که همبندی، هاوسدورفی، و فشردگی، ویژگیهایی به تمام معنی «خوب» هستند. بنابراین، طبیعی است بخواهیم بدانیم که در فرایند معمولی ساختن فضاهای توپولوژیک، این‌گونه ویژگیهای خوب از فضاهای اصلی به فضاهای نهایی حاصل، منتقل می‌شوند یا نه، از این قرار:

نکتهٔ ۱. نگاره‌های پیوستهٔ فضاهای همبند (همبند ـ راه)، فضاهایی همبند (همبند ـ راه) هستند.

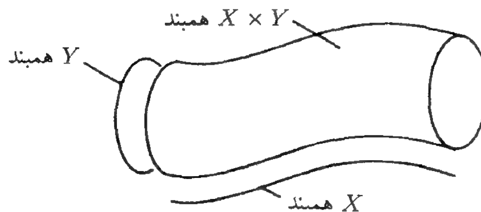
به‌گفتهٔ دیگر، اگر X همبند (همبند ـ راه) و $f : X \to Y$ پیوسته باشد، $f(X)$ به‌عنوان زیرفضای Y نیز همبند (همبند ـ راه) است. زیرا، یک تجزیهٔ $f(X)$ به شکل $A \cup B$، مستلزم تجزیهٔ مشابهی برای $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ است، و هکذا.



نکتهٔ ۲. اجتماعهای ناجدا از هم[1] فضاهای همبند (همبند ـ راه) فضاهایی همبند (همبند ـ راه) هستند. یعنی اگر X_0 و X_1 زیرفضاهایی همبند (همبند ـ راه) از فضای X باشند و بعلاوه $X = X_0 \cup X_1$ و $X_0 \cap X_1 \neq \varnothing$، آنگاه X نیز همبند (همبند ـ راه) است.



نکتهٔ ۳. حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ از فضاهای توپولوژیک ناتهی X و Y، همبند (همبند ـ راه) است، اگر و تنها اگر هر دو سازهٔ آن همبند (همبند ـ راه) باشند.

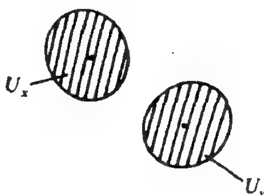


پرسش خنده‌دار: دربارهٔ اجتماع جدا از هم X و Y چه فکر می‌کنید؟

۷. اصل موضوع جداسازی هاوسدورف

تعریف (اصل موضوع جداسازی هاوسدورف). یک فضای توپولوژیک را فضای هاوسدورف[2] گویند هرگاه برای هر دو نقطهٔ متمایز آن، همسایگیهایی جدا از هم وجود داشته باشند.

1. non-disjoint   2. Hausdorff space



مثلاً، هر فضای متری یک فضای هاوسدورف است، زیرا اگر d متریک فضا باشد و $d(x,y)=\varepsilon>o$، مجموعه‌های

$$U_x := \{z|d(x,z)<\varepsilon/۲\} \text{ و } U_y := \{z|d(y,z)<\varepsilon/۲\}$$

نمونه‌هایی از همسایگیهای جدا از هم‌اند.

ویژگی «نا هاوسدورفی»، به‌کلی مخالف شهود، و حتی در نگاه اول نامعقول، و برخلاف شهود ما در مورد مفهوم همسایگی به‌نظر می‌رسد. به همین دلیل، هاوسدورف، اصل جداسازی فوق را در تعریف اولیهٔ خود از «فضاهای توپولوژیک» گنجانید (۱۹۱۴). اما، بعدها، معلوم شد که توپولوژیهای ناهاوسدورفی نیز ممکن است خیلی مفید واقع شوند، مثلاً «توپولوژی زاریسکی[1]» در هندسهٔ جبری یکی از آنهاست. در هر حال، می‌توان در توپولوژی گامهای نسبتاً زیادی برداشت، بی‌آنکه حقیقتاً احساس نیاز به فضاهای نا هاوسدورفی پیدا کرد، هر چند بهتر است که مبتدیها اینجا آنجا دنبال هاوسدورف بودن فضا نگردند. کسانی که می‌خواهند دست‌کم یکبار چنین موجود مرموزی را ببینند، یک مجموعهٔ X با بیش از یک عضو اختیار و روی آن توپولوژی بیمایهٔ $\{X,\varnothing\}$ را بنا کنند.

یکی از فواید اصل جداسازی، استفاده در یکتایی همگرایی است:

تعریف (دنبالهٔ همگرا[2]). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک، و $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در X باشد. یک نقطهٔ $a\in X$ را حد این دنباله نامند هرگاه برای هر همسایگی نقطهٔ a، مانند U، یک n_oی وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر $n\geqslant n_o$، $x_n\in U$.

یادداشت. در یک فضای هاوسدورف، هر دنباله می‌تواند حداکثر یک حد داشته باشد.
از سوی دیگر، در یک فضای توپولوژیک بیمایه، هر دنباله به هر نقطه همگراست.

دربارهٔ رفتار نسبت به اعمال، توجه شما را به نکتهٔ زیر، که به سادگی ثابت می‌شود، جلب می‌کنیم:

یادداشت. هر زیر فضای یک فضای هاوسدورف، خود یک فضای هاوسدورف است، و دو فضای

1. Zariski topology 2. convergent sequence

توپولوژیک ناتهی X و Y هاوسدورف‌اند، اگر و تنها اگر، اجتماع جدا از هم آنها، $X + Y$، هاوسدورف باشد، همچنین‌اند، اگر و تنها اگر، حاصلضرب آنها، $X \times Y$ هاوسدورف باشد.

اصل جداسازی هاوسدورف را T_2 نیز نامیده‌اند. چنین به‌نظر می‌آید که باید T_1ی هم مطرح باشد، مگر نه؟ خوب دربارهٔ T_0، T_1، T_2، T_3، T_4، T_5 چه می‌گویید؟ حالا ما از $T_{2\frac{1}{2}}$ و $T_{3\frac{1}{2}}$ صحبت نمی‌کنیم! ولی اصل هاوسدورف، به مراتب از همهٔ اینها مهمتر است، و بیش از بقیه لازم است به حافظه سپرده شود. آیا ضرورتی دارد که برای شما بگوییم T_1 به‌جای چه به‌کار برده می‌شود؟ ولی، نه. می‌توانیم تا فرصت مناسب منتظر بمانیم.

۸. فشردگی

و اما، فشردگی! چه ویژگی شگفت‌انگیزی! صفت شگفت‌انگیز برای توپولوژی، خصوصاً در توپولوژی دیفرانسیل و توپولوژی جبری مصداق دارد. زیرا، علی‌الاصول، در این زمینه‌ها، هنگامی‌که با فضاهای فشرده، خمینه‌های فشرده، مجتمعهای ضعیف ـ توپولوژی متناهی ـ بستار فشرده، یا CW، گروههای فشرده و جز آنها سروکار داریم، هیچ‌گونه مشکلی پیش نمی‌آید و همه چیز روال معمولی خود را دارد. امّا در عالم همه چیز نمی‌تواند فشرده باشد، ولی حتی برای مسائل «نافشرده» نیز غالباً بهتر است که در مرحلهٔ اوّل، به حالت فشرده پرداخته شود: باید نخست بر «زمینه‌های فشرده» که دستیابی بر آنها ساده‌تر است مسلط شد و سپس با تغییر تکنیکهای مناسب راه خود را برای حالت نافشرده باز کرد. استثناهایی که ممکن است پیش آید، مؤیّد این قاعده هستند: تصادفاً، نافشردگی نیز مزایایی دارد، زیرا «جا»ی بیشتری برای برخی ساختمانها در اختیار ما می‌گذارد . . . امّا حالا:

تعریف (فشردگی). یک فضای توپولوژیک را فشرده[1] گویند هرگاه هر پوشش باز آن یک زیر ـ پوشش متناهی داشته باشد. معنی این جمله این‌است که X فشرده است هرگاه در ویژگی زیر صدق کند: اگر $\mathfrak{A} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ پوشش باز دلخواهی از X، یعنی $U_\lambda \subset X$ باز باشد و $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$، آنگاه تعدادی متناهی از اعضای Λ مانند $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ موجودند به‌گونه‌ای که $U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_r} = X$.

یادداشت. بسیاری از مؤلفین، چنین فضاهایی را «شبه فشرده[2]» می‌نامند و واژهٔ «فشرده» را برای فضاهای «شبه فشرده و هاوسدورف» اختصاص می‌دهند.

در فضاهای فشرده، تعمیم از «موضعی[3]» به «سراسری[4]» برای ویژگیهایی از نوع زیر، شدنی است:

1. compact 2. quasicompact 3. local 4. global

فرض کنیم X فضایی فشرده باشد و P یک ویژگی، که زیرمجموعه‌های باز X ممکن است آن‌را دارا باشند یا نباشند، و نیز اگر U و V ویژگی P را دارند، $U \cup V$ نیز ویژگی P را داشته باشد، (مثالها ذیلاً خواهند آمد). در این‌صورت، اگر X این ویژگی را به‌طور موضعی [1] دارا باشد، یعنی اگر هر نقطه دارای یک همسایگی با ویژگی P باشد، آنگاه خود X ویژگی P را داراست. در واقع، چنین همسایگیهایی یک پوشش باز $\{U_x\}_{x \in X}$ از X را تشکیل می‌دهند؛ امّا با انتخاب مناسب تعدادی متناهی x_i، خواهیم داشت

$$X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_r}.$$

و بنابر فرض، این ویژگی با استقراء به اجتماعهای متناهی منتقل می‌شود، همان چیزی که می‌خواستیم اثبات کنیم.

مثال ۱. فرض کنیم X فشرده و $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی موضعاً کراندار (مثلاً، پیوسته) باشد. در این‌صورت، f کراندار است.

مثال ۲. فرض کنیم X فشرده و $(f_n)_{n \geqslant 1}$ یک دنبالهٔ همگرای یکنواخت موضعی [2] از توابع روی X باشد. دراین‌صورت، این دنباله، روی کل فضای X همگرای یکنواخت است.

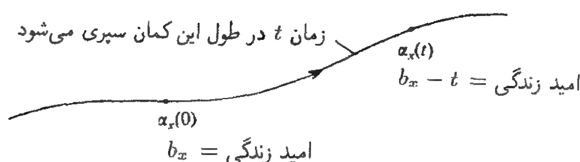
مثال ۳. فرض کنیم X فشرده و $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ یک پوشش موضعاً متناهی [3] باشد (یعنی هر نقطه دارای یک همسایگی باشد که A_λ را فقط به‌ازای تعدادی متناهی از λ قطع کند). دراین‌صورت، خود پوشش، یک پوشش متناهی است.

مثال ۴. فرض کنیم X فضایی فشرده و $A \subset X$ زیرمجموعه‌ای موضعاً متناهی باشد (تعریفی برای آن درست کنید). دراین‌صورت، A متناهی است. و یا، بعکس، چنانچه $A \subset X$ نامتناهی باشد، آنگاه یک نقطه $x \in X$ هست به‌گونه‌ای که همهٔ همسایگیهای آن شامل تعدادی نامتناهی از نقاط A است.

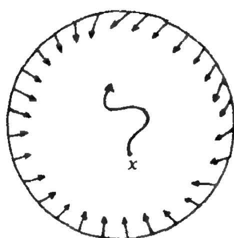
مثال ۵. فرض کنیم v یک میدان برداری [4] دیفرانسیلپذیر بر یک خمینهٔ M، مثلاً بر یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^n$، باشد. یکی از خمهای انتگرال ماکسیمال [5] این میدان مانند $\alpha_x : (a_x, b_x) \to M$ با شرط $\alpha(o) = x$ را در نظر می‌گیریم و b_x را، با یک نامگذاری بجا، (بقیهٔ) امید زندگی [6] و $-a_x > o$ را سن x در میدان برداری v می‌نامیم. از نظریهٔ موضعی معادلات دیفرانسیل معمولی، چنین برمی‌آید که، از لحاظ موضعی، کرانهای پایینی مثبتی برای امید زندگی و سن وجود دارد. بنابراین، ـ و در اینجاست که فشردگی دخالت می‌کند ـ برای هر مجموعهٔ فشردهٔ $X \subset M$ نیز یک چنین کرانهای پایینی وجود

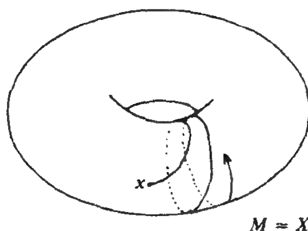
1. locally 2. locally uniformly convergent 3. locally finite
4. vector field 5. maximal integral curve 6. life expectancy

خواهد داشت. حال اگر نقطه‌ای در طول خمِ جوابِ خودش حرکت کند، سنش افزایش می‌یابد و امید زندگیش رو به کاهش می‌نهد.



اگر امید زندگی متناهی باشد، یعنی $b_x < \infty$ ، دراین‌صورت، این امید رفته رفته هر قدر بخواهیم کوچک می‌شود، و لم معروف و سودمند زیر به دست می‌آید: اگر نقطه‌ای از یک زیر فضای فشردهٔ $X \subset M$ امید زندگی متناهی داشته باشد، اجباراً باید، پیش از آنکه فضای X را برای همیشه ترک کند، تمام آن‌را مصرف کند. ببینیم اگر یک نقطه نتواند مجموعهٔ X را ترک کند، چه پیش خواهد آمد؟ خواه چنین پدیده‌ای از آن رو پیش آید که در مرز X بردارهایی، متوجّه درون، سنگر گرفته باشند و یا خواه بدین‌علت که کل جهان مورد بحث، M، فشرده باشد و $X = M$؟





در چنین شرایطی، هر نقطه از X باید تا ابد حرکت کند. به‌ویژه، یک میدان برداری بر یک خمینهٔ فشردهٔ بدون مرز، همواره انتگرالپذیر سراسری[1] است.

اکنون به موضوع بحث خود بازگردیم! پیامد این امکان‌گذر از موضعی به سراسری، البته چنان وسیع است که نمی‌تواند در چند صفحه کاملاً مورد بحث قرارگیرد. اما، با اشارات فوق، خواستم نه تنها مفیدبودن مفهوم فشردگی را بیان کنم، بلکه اندکی هم آن‌را روشنترکنم.

نمونه‌های فضاهای فشرده کدام‌اند؟ بازهٔ بستهٔ $[o, 1]$، با این‌که جلوهٔ چندانی ندارد، ولی نمونهٔ مهمی است، زیرا، نمونه‌های دیگری از آن نتیجه می‌شوند. می‌دانیم که برای هر پوشش باز $[o, 1]$، یک «عدد لبگ» وجود دارد، یعنی $\delta > o$یی هست که هر زیر بازهٔ به طول δ، در یکی از مجموعه‌های این پوشش قرار دارد. (اثبات از راه برهان خلف: چنانچه چنین عددی وجود نمی‌داشت، می‌توانستیم یک

1. globally integrable

دنبالهٔ $(I_n)_{n\geqslant 1}$ از زیربازه‌های $I_n \subset [o, 1]$ به درازای $\frac{1}{n}$ چنان برگزینیم که هیچ‌یک در هیچ‌کدام از مجموعه‌های این پوشش نباشد. دنبالهٔ نقاط وسط این زیربازه‌های I_n، دارای زیر دنباله‌ای همگرا به نقطه‌ای مانند $x \in [o, 1]$ خواهد بود. اما، با توجه به آن‌که x در یکی از مجموعه‌های پوشش است، وقتی‌که n بسیار بزرگ باشد، به تناقض می‌رسیم.) اکنون که وجود عدد لبگ ثابت شد، از آنجاکه می‌توان $[o, 1]$ را با تعدادی متناهی بازه به درازای δ پوشاند، می‌توان آن‌را با تعدادی متناهی از پوششهای باز مفروض نیز پوشاند.

گزاره ۱. نگاره‌های پیوستهٔ فضاهای فشرده، فشرده‌اند. به‌عبارت دیگر، اگر X فضایی فشرده و $f : X \to Y$ پیوسته باشد، $f(X)$ زیرفضای فشردهٔ Y است.

برهان. فرض‌کنیم $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ پوشش بازی برای $f(X)$ باشد. دراین‌صورت، $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ پوششی باز برای X خواهد بود، درنتیجه، باگزینش مناسب اندیسها، خواهیم داشت

$$X = f^{-1}(U_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{\lambda_r})$$

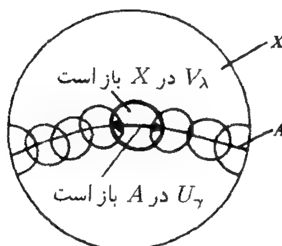
و از آنجا

$$f(X) = U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_r},$$

همان چیزی که می‌خواستیم. □

گزاره ۲. زیرفضاهای بستهٔ فضاهای فشرده، فشرده‌اند.

برهان. گیریم X فشرده، $A \subset X$ بسته و $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک پوشش باز A باشد. بنابرتعریف توپولوژیِ زیرفضایی، یک خانوادهٔ $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از مجموعه‌های باز X وجود دارد به‌گونه‌ای که $U_\lambda = A \cap V_\lambda$. اکنون گوییم که چون A بسته است، پس خانوادهٔ $\{X\backslash A, \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\}$ پوششی باز برای X است.

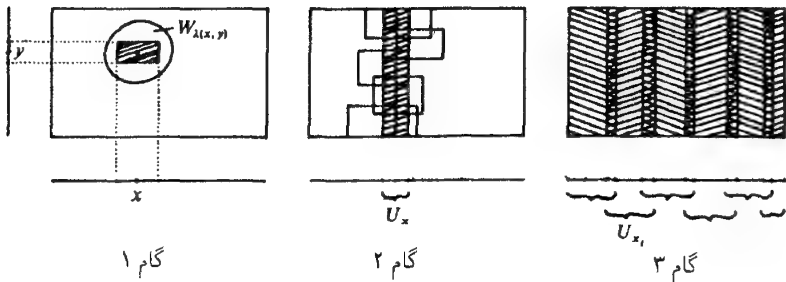


درنتیجه، می‌توان λ_1، ...، λ_r را چنان برگزید که $X = (X\backslash A) \cup U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_r}$، یعنی

$A = U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_r}$، همان چیزی که می‌خواستیم. □

گزاره ۳. دو فضای ناتهی X و Y فشرده‌اند، اگر و تنها اگر، اجتماع جدا از هم آنها فشرده باشد، همچنین‌اند، اگر و تنها اگر، حاصلضرب آنها فشرده باشد.

برهان. (تنها به اثبات فشردگی حاصلضرب فضاهای فشرده خواهیم پرداخت، که جالبترین و در عین حال مشکلترین حکم قضیه است. عکس آن، نتیجه‌ای از گزارهٔ ۱ است، و حکم مربوط به اجتماع جدا از هم، بدیهی است). فرض کنیم X و Y فضاهایی فشرده و $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ پوشش بازی برای $X \times Y$ باشد.



گام ۱   گام ۲   گام ۳

گام یکم. می‌توانیم برای هر (x, y) یک $\lambda(x, y)$ برگزینیم به گونه‌ای که $(x, y) \in W_{\lambda(x,y)}$، و با توجه به این که $W_{\lambda(x,y)}$ باز است، بگوییم که این مجموعهٔ باز شامل مستطیل بازی است به شکل $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)}$.

گام دوم. برای یک x ثابت، خانوادهٔ $\{V_{(x,y)}\}_{y \in Y}$ پوشش بازی برای Y است، و در نتیجه $y_1(x)$، ...، $y_{r_x}(x)$هایی چنان وجود دارند که

$$V_{(x,y_1(x))} \cup \ldots \cup V_{(x,y_{r_x}(x))} = Y$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$U_{(x,y_1(x))} \cap \ldots \cap U_{(x,y_{r_{(x)}}(x))} =: U_x$$

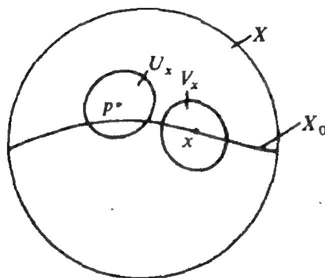
گام سوم. چون X فشرده است، می‌توان x_1، ...، x_n را چنان برگزید که $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} = X$، و درنتیجه $X \times Y$ با (عده‌ای متناهی!) از $W_{\lambda(x_i,y_j(x_i))}$ها، $n \leqslant i \leqslant 1$ و $r_i \leqslant j \leqslant 1$، پوشیده

می‌شود. همان چیزی که می‌خواستیم. □

از روی فشردگی بازهٔ بسته و گزاره‌های سه‌گانهٔ فوق، می‌توانیم فشردگی فضاهای متعدد دیگری را ثابت کنیم. مثلاً، همهٔ زیرفضاهای بستهٔ مکعب n بعدی، و از آنجا همهٔ زیرمجموعه‌های بسته و کراندار $\mathbb{R}^n$، فشرده‌اند. این حکم، نیمی از قضیهٔ معروف هاینه ـ بورل[1] است که می‌گوید: یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد. ببینیم چرا هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $X_o \subset \mathbb{R}^n$ باید بسته وکراندار باشد؟ ببینید، ما قبلاً دیده‌ایم که توابع پیوسته بر مجموعه‌های فشرده، توابعی کراندارند، و این امر به‌ویژه برای تابع نُرم نیز صادق است، و از اینجا نتیجه می‌گیریم که X_o کراندار است. و اما، بسته‌بودن X_o از لم ساده ولی سودمند زیر نتیجه می‌شود:

لم. اگر X یک فضای هاوسدورف و $X_o \subset X$ یک زیر فضای فشرده باشد، آنگاه X_o در X بسته است.

برهان. باید نشان دهیم که $X\backslash X_o$ باز است، پس باید ثابت کنیم که هر نقطهٔ p از $X\backslash X_o$ دارای یک همسایگی U است که X_o را قطع نمی‌کند. به‌ازای هر $x \in X_o$، همسایگی U_x برای p و همسایگی V_x برای x را چنان بر می‌گزینیم که جدا از هم باشند. هر چند ممکن است که



U_x مجموعهٔ X_o را قطع کند، اما دست‌کم اطمینان داریم که $V_x \cap X_o$ را قطع نمی‌کند، و اگر تعدادی متناهی نقطهٔ $x_1, \ldots, x_n \in X_o$ را چنان برگزینیم که

$$(V_{x_1} \cap X_o) \cup \ldots \cup (V_{x_n} \cap X_o) = X_o$$

(گزینش این نقاط، به‌دلیل فشردگی، همواره شدنی است)، می‌بینیم که

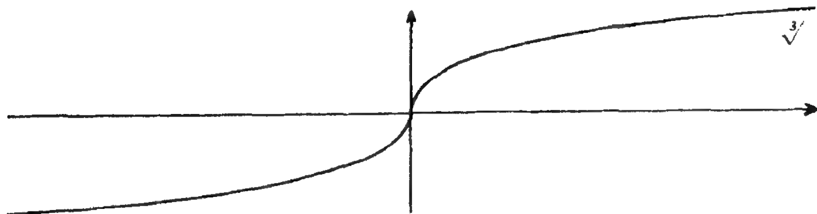
$$U := U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n}$$

1. Heine-Borel theorem

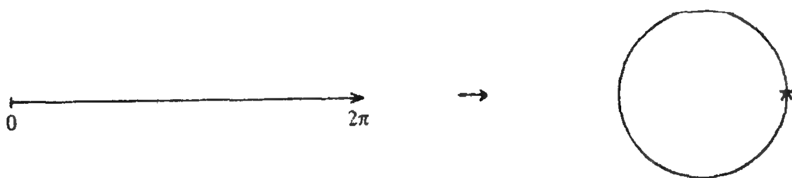
یک همسایگی نقطهٔ p با ویژگی مطلوب است، یعنی $X_\circ$ را قطع نمی‌کند. همان چیزی که می‌خواستیم.□

*

به‌عنوان آخرین قضیهٔ این بخش، البتّه نه از لحاظ اهمّیت، می‌خواهم قضیهٔ کوچک مستلزم دقّتی را دربارهٔ همسانریختیها بیان کنم، اما نخست چندکلمه‌ای برای روشن‌کردن اهمّیت قضیّه: با نخستین مفاهیم مربوط به یکریختی در جبر خطی آشنا شده و دیده‌ایم که برای اثبات این‌که یک نگاشت خطی $f : V \to W$ یک یکریختی است، کافی است دوسویی‌بودن f را ثابت کنیم، زیرا در این‌صورت، نگاشت $f^{-1} : W \to V$ خودبه‌خود خطی خواهد بود. عین همین مطلب، مثلاً در مورد گروهها و همریختی گروهها، نیز صادق است. تاکنون، عادت‌کرده بودیم بپذیریم که ویژگیهای نگاشتهای دوسویی به وارون آنها نیز منتقل می‌شوند، ولی باکمال تأسف می‌بینیم که ویژگیهای خوب دیگری برای نگاشتهای دوسویی وجود دارند که به نگاشت وارون منتقل نمی‌شوند: مثلاً، تابع $x \mapsto x^3$ یک نگاشت دوسویی دیفرانسیلپذیر از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است، اما نگاشت وارون آن در مبدأ مختصات دیفرانسیلپذیر نیست:



متأسفانه، در مورد پیوستگی نیز وضعیت بهتر از این نیست: به‌عنوان مثال، نگاشت همانی از یک مجموعهٔ X با توپولوژی گسسته، به خود همان مجموعهٔ X با توپولوژی بیمایه، یکی از این موارد است. یا اصلاً لازم نیست به چنین مثالهای دست بالایی متوسل شویم: کافی است فقط، بازهٔ نیمباز $[0, 2\pi)$ را، با استفاده از تابع $t \mapsto e^{it}$، یک‌بار به دور دایرهٔ با شعاع واحد بپیچیم و ملاحظه کنیم که به‌این ترتیب، یک تابع پیوستهٔ دوسویی داریم که نمی‌تواند یک همسانریختی باشد، زیرا دایره فشرده است، درحالی‌که



بازهٔ نیمباز، فشرده نیست. اما، حتی هنگامی‌که f^{-1} پیوسته است، اثبات پیوستگی آن ممکن است

خیلی پرزحمت باشد. خصوصاً هنگامی‌که پیوستگی خود f از دستور صریحی به شکل $y = f(x)$ به‌دست آمده باشد، ولی راهی برای به دست‌آمدن دستور متناظر آن $x = f^{-1}(y)$ به‌نظر نرسد. به همین دلیل، بهتر است شرطی به‌دست دهیم که نوعاً شرطی کلی و بررسی آن غالباً ساده باشد و در عین حال تضمین کند که وارون یک نگاشت دوسویی پیوسته، همواره پیوسته است:

قضیه. یک نگاشت دوسویی پیوسته $f : X \to Y$ از یک فضای فشردهٔ X به یک فضای هاوسدورف Y همواره یک همسان‌ریختی است.

برهان. باید نشان دهیم که نگاره‌های مجموعه‌های باز، بازند. و یا هم‌ارز با آن، نگاره‌های مجموعه‌های بسته، بسته‌اند. پس، فرض می‌کنیم $A \subset X$ بسته باشد. لذا A فشرده است، زیرا یک زیر فضای بسته از یک فضای فشرده است. از اینجا معلوم می‌شود که $f(A)$ فشرده است (زیرا نگارهٔ پیوستهٔ یک فضای فشرده است)، و درنتیجه، $f(A)$ (به‌عنوان زیرفضای فشردهٔ فضای هاوسدورف Y) بسته است. همان چیزی که می‌خواستیم. □

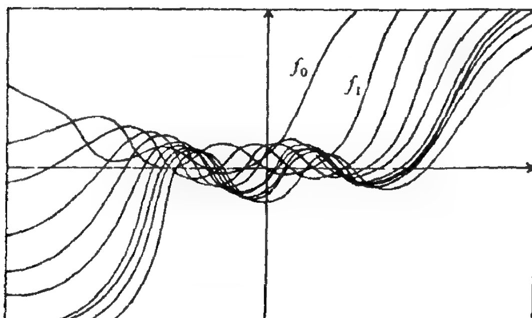
۲

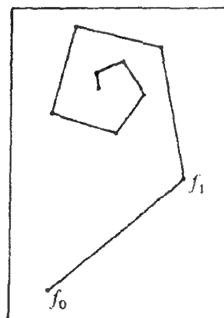
فضاهای برداری توپولوژیک

شمار فراوانی از عناصر دخیل در ریاضیات، توسط یک رشتهٔ نامتناهی از اعداد حقیقی یا مختلط کاملاً معین می‌شوند: به‌عنوان مثال، یک سری تیلر با دنبالهٔ ضرایبش معین می‌شود ... بنابراین می‌توان عددهای این دنباله را، که تعیین‌کنندهٔ هر یک از عناصر به‌عنوان مختصات آن عناصر هستند، مختصات یک نقطه در یک فضای بینهایت بعدی (E_ω) که عدهٔ ابعاد آن بینهایت شمارا است، تلقی نمود. این برداشت، مزایای چندی در عمل به‌دنبال دارد. نخستین امتیاز همواره وقتی ظاهر می‌شود که بیان هندسی را به‌کار می‌بریم، دراین صورت مشابهتهایی پدید می‌آید که شهود را آسان می‌سازد ... .

موریس فرشه[1]

نکاتی از حساب تابعی (۱۹۰۶)





1. Maurice Fréchet

۱. مفهوم فضای برداری توپولوژیک

فصل کوتاه حاضر هدفی برتر از آن ندارد که رده‌ای از فضاهای توپولوژیک را که حقیقتاً در دامنهٔ کاربردهای توپولوژی (در این مورد، آنالیز تابعی) پدید می‌آید معرّفی نماید. این فضاها که اهمیت بسزایی دارند، فضاهای برداری توپولوژیک نامیده می‌شوند. بنابراین، بجاست که این مثالها را در آغاز کتاب قرار دهیم، چراکه نقش مهمی در تکوین مفهوم فضاهای توپولوژیک برعهده داشته‌اند (فرشه ۱۹۰۶).

تعریف (فضای برداری توپولوژیک). فرض کنیم $\mathbb{K}$ هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یا هیأت اعداد مختلطِ $\mathbb{C}$ باشد. یک فضای برداری E روی $\mathbb{K}$ همراه با یک ساختار فضای توپولوژیک را فضای برداری توپولوژیک [1] می‌نامیم هرگاه ساختارهای توپولوژیک و برداری آن به‌معنای زیر با هم سازگار باشند:

اصل موضوع ۱. عمل تفریق $E \times E \to E$ پیوسته باشد؛

اصل موضوع ۲. عمل ضرب در اسکالرها $\mathbb{K} \times E \to E$ پیوسته باشد.

توجّه. برخی از مؤلفین اصل موضوع زیر را نیز می‌افزایند:

اصل موضوع ۳. فضای توپولوژیک E هاوسدورف باشد (مثلاً دانفرد و شوارتس [2] در مرجع [۷]، این اصل را می‌پذیرند، اما بورباکی [3] در مرجع [۱] آن را نمی‌پذیرد).

به‌جای پیوستگی عمل تفریق در اصل ۱، می‌توانستیم پیوستگی عمل جمع را قرار دهیم، زیرا از اصل ۲ نتیجه می‌شود که نگاشت $E \to E$، $x \mapsto -x$ پیوسته است، و از آنجا نگاشت $E \times E \to E \times E$، $(x,y) \mapsto (x,-y)$ نیز پیوسته خواهد بود. اما گنجاندن «عمل تفریق» به‌جای «عمل جمع» در اصل ۱، دلیلی دارد که مطلقاً بر پایهٔ زیبایی استوار نیست و هم‌اکنون به‌شرح آن می‌پردازیم.

همان‌گونه که در این فصل مفاهیم «فضای برداری» و «فضای توپولوژیک» با هم ارتباط پیدا کردند، بسیاری از مفاهیم جالب و مفید دیگر از ارتباط بین توپولوژی و ساختار جبری پدید می‌آیند. به‌ویژه، چنانچه G یک گروه و در عین حال یک فضای توپولوژیک باشد، آن را یک گروه توپولوژیک [4] می‌نامند هرگاه ساختار گروه و توپولوژی با هم سازگار باشند. اما منظور از این سازگاری چیست؟ منظور آن است که عمل ترکیب

$$G \times G \to G, \qquad (a,b) \mapsto ab$$

و نگاشت وارون $G \to G$، $a \mapsto a^{-1}$، نگاشتهایی پیوسته‌اند. اما، می‌توان این دو شرط را در یک شرط ادغام کرد، و اصل موضوع گروههای توپولوژیک را به‌دست داد: نگاشت $G \times G \to G$،

1. topological vector space 2. Dunford-Schwartz 3. Bourbaki
4. topological group

ab^{-1} ↤ (a, b) نگاشتی پیوسته است.

بنابراین، اصل ۱ دقیقاً بیان می‌کند که گروه جمعی $(E, +)$ با توپولوژی E، یک گروه توپولوژیک تشکیل می‌دهد.

در چهار بخش آتی، متداولترین رده‌های فضای برداری توپولوژیک را، با رعایت ترتیب از جزئی به کلی، می‌آوریم:

۲. فضاهای برداری متناهی ـ بعد

فضای $\mathbb{K}^n$، با توپولوژی معمولی، یک فضای برداری توپولوژیک است، و هر یکریختی $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ نیز یک همسانریختی است. پس، هر فضای برداری n بعدی V، دقیقاً یک توپولوژی می‌پذیرد که برای آن لااقل یک (و در نتیجه هر) یکریختی $V \cong \mathbb{K}^n$ یک همسانریختی است، و با این توپولوژی، V به‌یک فضای برداری توپولوژیک بدل می‌شود. همهٔ این مطالب پیش پاافتاده‌اند و بدون شک توپولوژی «معمولی» که بدین‌گونه معین می‌شود، بدیهیترین توپولوژی است که می‌توان برای V یافت. اما درواقع، این توپولوژی چندان هم «بدیهی» نیست، زیرا قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه. توپولوژی معمولی روی یک فضای برداری متناهی‌بعد V یگانه توپولوژیی است که آن را به یک فضای برداری توپولوژیک هاوسدورف بدل می‌سازد.

(برهان این قضیه را نمی‌آوریم. خواننده می‌تواند مراجعه کند به بورباکی [۱]، قضیهٔ ۲، ص ۱۸).

این قضیه نشان می‌دهد که فضاهای برداری توپولوژیک متناهی‌بعد، به‌عنوان موضوعی مستقل برای مطالعه جالب نیستند، و مفهوم فضاهای برداری توپولوژیک، به‌دلیل حالت نامتناهی‌بعدی، وارد ریاضیات شده‌اند. اما، حتی برای فضاهای نامتناهی‌بعد نیز، یک نتیجهٔ مهم از قضیهٔ بالا به‌دست می‌آید: چنانچه V یک زیرفضای برداری متناهی‌بعد در یک فضای برداری توپولوژیک هاوسدورف دلخواه E باشد، توپولوژی V که از E بر آن القاشده دقیقاً همان توپولوژی معمولی است، حتی اگر E طبیعیترین نمونه در رستهٔ خود باشد.

۳. فضاهای هیلبرت

یادآوری کنیم که فضای با حاصلضرب داخلی،[1] یک فضای برداری حقیقی (همچنین مختلط) E است همراه با یک صورت دوخطی متقارن (به‌ترتیب اِرمیتی[2]) مثبت و معین $\langle \cdot\cdot, \cdot\cdot \rangle$. در این‌صورت،

---

1. inner product space 2. Hermitian

برای $v \in E$، عدد $\| v \| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ نرم[1] v نامیده می‌شود.

یادداشت. اگر $(E, \langle \cdot\cdot, \cdot\cdot \rangle)$ فضایی با حاصلضرب داخلی باشد، آنگاه برابری $d(v, w) := \| v - w \|$ معرّف متریکی است که توپولوژی وابسته به‌آن، E را به یک فضای برداری توپولوژیک مبدّل می‌سازد.

تعریف (فضای هیلبرت). فضای با حاصلضرب داخلی را فضای هیلبرت[2] گوییم هرگاه نسبت به متریک خود کامل باشد، یعنی هرگاه هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد.

پس از فضاهای متناهی‌بعد، فضاهای هیلبرت یقیناً ساده‌ترین فضاهای برداری توپولوژیک‌اند، و می‌توان آنها را به‌شیوهٔ زیر کاملاً رده‌بندی کرد: یک خانوادهٔ $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ از بردارهای یکهٔ دوبه‌دو متعامد در یک فضای هیلبرت H را یک پایهٔ هیلبرتی[3] برای H گویند هرگاه یگانه بردار قائم بر همهٔ e_λها فقط بردار صفر باشد. می‌توان ثابت کرد که هر فضای هیلبرت چنین پایه‌ای دارد، و هر دو پایه از یک فضای هیلبرت، یک عدد اصلی مشترک دارند، و سرانجام هر دو فضای هیلبرت با پایه‌های همتوان، طولپا ـ یکریخت[4] اند.

۴. فضاهای باناخ

تعریف (فضاهای نرمدار). فرض کنیم E فضایی برداری است روی $\mathbb{K}$. یک نگاشت $\| \cdot\cdot \| : E \to \mathbb{R}$ را یک نرم گوییم هرگاه در اصول زیر صدق کند:

N۱. برای هر $x \in E$، $\| x \| \geqslant 0$؛ و $\| x \| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

N۲. برای هر $x \in E$ و هر $a \in \mathbb{K}$، $\| ax \| = |a| \, \| x \|$.

N۳. (نابرابری مثلثی). برای هر $x, y \in E$، $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

یک زوج $(E, \| \cdot\cdot \|)$ متشکل از یک فضای برداری و یک نرم را یک فضای نرمدار[5] می‌نامند.

یادداشت. ۱ اگر $(E, \| \cdot\cdot \|)$ یک فضای نرمدار باشد، برابری

$$d(x, y) := \| x - y \|$$

معرّف متریکی است که توپولوژی وابسته به‌آن E را به‌یک فضای برداری توپولوژیک مبدّل می‌سازد.

1. norm 2. Hilbert space 3. Hilbert basis 4. isometrically isomorphic
5. normed space

تعریف (فضای باناخ). یک فضای نرمدار را فضای باناخ[1] گویند هرگاه کامل باشد، یعنی هرگاه هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد.

فضاهای هیلبرت و باناخ، به‌ویژه مثالهایی از فضاهای برداری توپولوژیک هستند، اما ساختاری اضافی دارند: روشن است که حاصلضرب داخلی $\langle \cdot\cdot, \cdot\cdot \rangle$ و یا نرم $\| \cdot\cdot \|$ را نمی‌توان از روی توپولوژی این فضاها به‌دست آورد. حتی در حالت بعد متناهی $n \geqslant 2$، یک فضای برداری nبعدی V نرمهای گوناگونی می‌پذیرد، که برخلاف حاصلضربهای داخلی، هیچ‌کدام از تأثیر خودریختیهای خطی فضا بر دیگری به‌دست نمی‌آید. البته، همهٔ این نرمها معرّف توپولوژی واحدی روی V هستند (که همان توپولوژی «معمولی» فضای nبعدی است). اما، در فضاهای نامتناهی‌بعد باناخ ، چنانچه توجه خود را حتی فقط به‌ساختار فضای برداری توپولوژیک این فضاها معطوف کنیم (همان‌طور که در آنالیز تابعی متداول است)، می‌بینیم که این فضاها چنان ردهٔ وسیعی تشکیل می‌دهند که، نه تنها دسته‌بندی آنها مشکل است، بلکه شاید واقعاً نتوان توصیف جامعی از همهٔ این رده‌ها به‌دست داد.

۵. فضاهای فرشه

تعریف (نیمنرم). فرض‌کنیم E فضایی است برداری روی $\mathbb{K}$. یک نگاشت $|\cdot\cdot| : E \to \mathbb{R}$ را یک نیمنرم[2] می‌نامیم هرگاه در اصول زیر صدق کند:

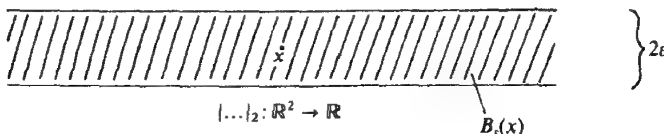
SN۱. برای هر $x \in E$، $|x| \geq o$.

N۲. $|ax| = |a|\,|x|$، } مانند نرمها.

N۳. نابرابری مثلثی، }

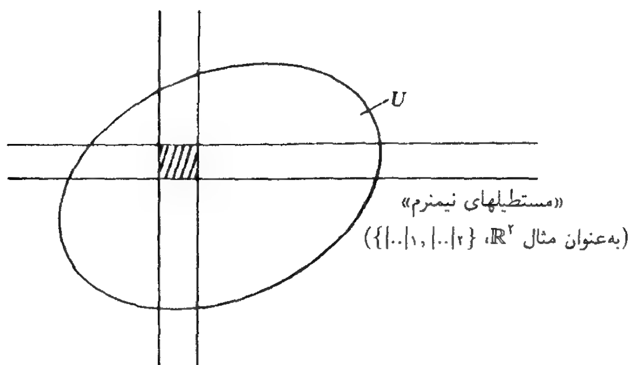
مثلاً، روی $\mathbb{R}^n$، نگاشت $|\cdot\cdot|_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، $x \mapsto |x_i|$، یک نیمنرم است.

برای نرمها و همچنین برای نیمنرمها، می‌توان از «گویهای باز»[3] سخن گفت. ما آنها را با $B_\varepsilon(x) := \{y \in E |\ |x-y| < \varepsilon\}$ نمایش می‌دهیم. اما، در حالت کلی، دیگر در آنها موضوع «گرد بودن» اصلاً مطرح نیست.



1. Banach space 2. seminorm 3. open balls

تعریف. فرض کنیم E فضایی است برداری و $\{|\cdot|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک خانواده از نیمنرمها روی E. یک زیرمجموعهٔ $U \subset E$ را در توپولوژیی که خانوادهٔ نیمنرمها پدید می‌آورند، بازگویند هرگاه هر نقطهٔ U عضو مشترک متناهی از نیمنرمهای گویهای بازی باشد که در U قرار دارند؛ به‌عبارت دیگر، برای هر $x \in U$، اعضایی چون $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \Lambda$ و عددی چون $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که $B_\varepsilon^{(\lambda_1)}(x) \cap \cdots \cap B_\varepsilon^{(\lambda_r)}(x) \subset U$.



با زبان و اصطلاحاتی که در فصل ۱، بخش ۴، دیدیم این گویهای بازِ نیمنرمهای $|\cdot|_\lambda$، $\lambda \in \Lambda$، یک زیرپایه برای توپولوژی فضا تشکیل می‌دهند، و یا توپولوژی فضا را پدید می‌آورند.

یادداشت. با توپولوژیی که خانوادهٔ نیمنرمهای $\{|\cdot|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ به‌دست می‌دهند E یک فضای برداری توپولوژیک می‌شود، که یک فضای هاوسدورف نیز خواهد بود اگر، و تنها اگر، o یگانه برداری باشد که همهٔ نیمنرمهای $|\cdot|_\lambda$ به‌ازای آن صفر می‌شوند.

تعریف (فضای مقدّمِ فرشه). یک فضای برداری توپولوژیک هاوسدورف که توپولوژی آن به‌کمک خانواده‌ای منتها شما را از نیمنرمها تعریف شده باشد، یک فضای مقدّم فرشه[1] نامیده می‌شود.

فضای فرشه، فضای مقدّم فرشه‌ای است که «کامل» باشد. مطمئناً کمال مفهومی است متری، ولی باید بگوییم که یک بیان توپولوژیک واضحی نیز برای این مفهوم در قالب فضاهای برداری توپولوژیک وجود دارد.

تعریف (فضاهای برداری توپولوژیک کامل). یک دنبالهٔ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ در فضای برداری توپولوژیک

1. pre-Fréchet space

را دنبالهٔ کوشی[1] گوییم هرگاه برای هر همسایگی o مانند U، یک n_o وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر $n, m \geqslant n_o$ رابطهٔ $x_n - x_m \in U$ برقرار باشد. چنانچه هر دنبالهٔ کوشی دنباله‌ای همگرا باشد، فضا را (دنباله‌یی کامل[2]) نامند.

البته، در فضاهای نرمدار، این مفهوم کمال با مفهوم پیشین کمال، که از روی متریک وابسته به نرم فضا تعریف می‌شد، هم‌ارز است.

تعریف (فضای فرشه). منظور از فضای فرشه[3]، فضای مقدّم فرشه‌ای است که کامل باشد.

باید توجه نمود که فضاهای مقدّم فرشه، همگی متریکپذیرند: چنانچه توپولوژی فضا توسّط دنباله‌ای از نیمنرمهای $|\cdot|_{n, n\geqslant ۱}$ داده شده باشد، برابری

$$d(x, y) := \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n} \frac{|x - y|_n}{۱ + |x - y|_n}$$

معرّف متریکی است که توپولوژی وابسته به‌آن همان توپولوژی فضاست و دنباله‌های کوشی آن نیز همان دنباله‌های کوشی فضا هستند.

۶. فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب

سرانجام، فضاهای موضعاً محدب را تعریف می‌کنیم. این فضاها کلیترین ردهٔ فضاهای برداری توپولوژیک هستند که برای آنها نظریه‌ای پر از قضایایی جالب و قشنگ وجود دارد.

تعریف. یک فضای برداری توپولوژیک را موضعاً محدب[4] گویند هرگاه هر همسایگی o شامل یک همسایگی محدب o باشد.

اکنون به بیان حقایقی می‌پردازیم که نشان می‌دهند تا چه حد این فضاها کلیتر از رده‌های نامبردهٔ پیشین هستند (از اثبات آن صرف‌نظر می‌شود، رجوع کنید به [۱۳] بخش ۱۸): یک فضای برداری توپولوژیک، موضعاً محدب است اگر و تنها اگر، توپولوژی آن بتواند توسّط خانواده‌ای از نیمنرمها تعریف شود؛ یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب، یک فضای مقدّم فرشه است، اگر و تنها اگر متریکپذیر باشد.

1. Cauchy sequence 2. (sequentially) complete 3. Fréchet Space
4. locally convex

۷. چند مثال

مثال ۱. مجموعهٔ توابع حقیقی f روی بازهٔ $[-\pi, \pi]$ راکه انتگرالپذیر لبگ[1] هستند و در شرط

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{۲} dx < \infty$$

صدق می‌کنند، در نظر می‌گیریم. دو تابع از این مجموعه را هم‌ارز خوانند هرگاه خارج از یک مجموعهٔ با اندازهٔ صفر، بر هم منطبق باشند. رده‌های هم‌ارزی آن‌را، با تسامح، توابع مربع انتگرالپذیر[2] می‌نامند. گیریم H مجموعهٔ این توابع باشد. یک ساختار متعارف فضای برداری حقیقی روی H وجود دارد و می‌توان آن‌را به‌کمک حاصلضرب داخلی:

$$\langle f, g\rangle := \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

به‌ساختار یک فضای هیلبرت تبدیل نمود. توابع مثلثاتی

$$e_k := \cos kx,\ e_{-k} := \sin kx$$

به‌ازای $k \geq ۱$ همراه با تابع $e_o := \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، یک پایهٔ هیلبرتی $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ برای H می‌سازند. نمایش هر عضو $f \in H$ به‌صورت $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, e_n\rangle e_n$ دقیقاً سری فوریهٔ f است.

مثال ۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $C(X)$ فضای برداری توابع پیوسته و کراندار روی X باشد، و

$$\| f \| := \sup_{x\in X}|f(x)|$$

در این‌صورت، $(C(X), \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ است.

مثال ۳. فرض کنیم $X \subset \mathbb{C}$ حوزه‌ای[3] در صفحهٔ مختلط باشد، فضای برداری توابع تمامریخت[4] روی X را با $\mathcal{O}(X)$ نمایش می‌دهیم، و این فضا را به توپولوژی وابسته به‌خانوادهٔ

$$\{|\cdot|_K\}_{K\subset X\ \text{فشرده،}\ K}$$

از نیمنرمهای $|f|_K := \sup_{z\in K}|f(z)|$، مجهز می‌کنیم (این توپولوژی را اصطلاحاً توپولوژی «همگرایی فشرده»[5] می‌گویند). در این‌صورت، $\mathcal{O}(X)$ یک فضای فرشه است (فقط کافی است دسته‌ای شمارا از K_nهاکه تمامی X را «تحلیل می‌برند» اختیارکنیم؛ ویژگی کمال، از قضیهٔ همگرایی

---

1. Lebesgue-integrable 2. square-integrable functions

۳. domain منظور مجموعهٔ باز و همبند است ـم.

4. holomorphic 5. compact convergence

وایرشتراس نتیجه می‌شود . . .).

سه‌مثال فوق، از جمله مثالهایی از «فضاهای تابعی»[1] زیادی هستند که به‌نحوی مؤثّر در آنالیز ظاهر می‌شوند. مانند فضاهای برداری، آنها را ابداع نکرده‌ایم، بلکه خودبه‌خود حضور دارند و نمی‌توان آنها را نادیده گرفت. این واقعیت نیز که عملگرهای خطی دیفرانسیل و انتگرال، رفتاری به‌شکل نگاشتهای خطی $L : E_1 \to E_2$ بین فضاهای تابعی دارند، مستقیماً از ماهیّت اشیاء ناشی می‌شود. اما اگر در این موارد، به جبر خطی اکتفا کنیم، به بیمایگیهائی کشیده می‌شویم. پس، برای درک ویژگیهای این عملگرها، لازم است به بررسی رفتار آنها از نظر پیوستگی نسبت به توپولوژیهای گوناگون بپردازیم، و از شناخت خود دربارهٔ ساختار فضاهای برداری توپولوژیک مجرّد بهره گیریم. هر چند توپولوژی نقطه مجموعه، که همهٔ بحث فعلی ما در بهادادن به‌آن‌است، نمی‌تواند معرّف لبهٔ تیز پژوهش در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی باشد. بااین‌حال، ابزاری اجتناب‌ناپذیر برای آن‌است، تا آنجا که باید مسلّم انگاشته شود.

هنوز مثالهایی از فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب ولی متریکناپذیر را، که در نتیجه فضاهای مقدّم فرشه هم نیستند، ارائه ننموده‌ام. البته، این فضاها نیز به‌طور کاملاً طبیعی در آنالیز تابعی ظاهر می‌شوند. مثلاً، گاهی نیاز داریم که «توپولوژی ضعیف»[2]، یعنی، درشت‌بافت‌ترین توپولوژیی را که برای آن همهٔ نگاشتهای خطی پیوستهٔ قدیمی $E \to \mathbb{R}$ (یعنی «تابعکهای خطی»[3]) پیوسته می‌مانند، یا به‌بیان دیگر، توپولوژیی راکه به‌کمک مجموعهٔ

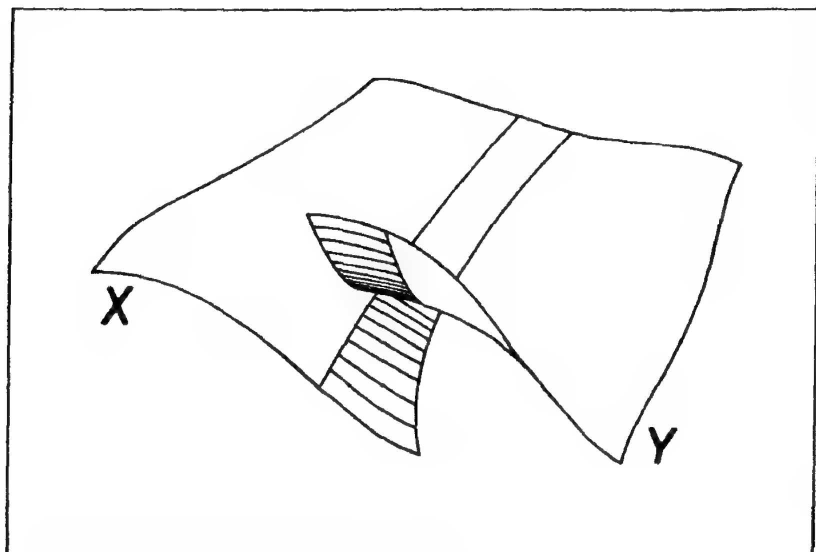
$$\{f^{-1}(U) \mid \text{باز است } U \subset \mathbb{R} \text{ خطی و پیوسته است و } f : E \to \mathbb{R}\}$$

پدید می‌آید روی یک فضای برداری توپولوژیک بررسی کنیم. با این توپولوژی، E باز هم فضایی است برداریِ توپولوژیک، اما بسیار پیچیده‌تر از آنچه قبلاً بود. حتی اگر با فضایی به‌سادگی یک فضای هیلبرت نامتناهی ـ بعد شروع کنیم، آنچه با توپولوژی ضعیف به‌دست می‌آید، یک فضای موضعاً محدب، هاوسدورف، اما متریکناپذیر خواهد بود (رجوع کنید به [۴]، ص ۷۶).

1. function spaces 2. weak topology 3. linear functionals

۳

توپولوژی خارج قسمت



۱. مفهوم فضای خارج قسمت

نمادگذاری. اگر X یک مجموعه و $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X باشد، مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی را با $X/\sim$، و ردهٔ هم‌ارزی یک عضو $x \in X$ را با $[x]$، $[x] \in X/\sim$، و نگاشت تصویر متعارف[1]

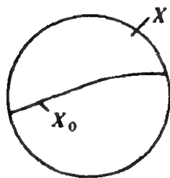
1. canonical projection

$X \to X/\sim$ را با π نمایش می‌دهیم، یعنی $\pi : X \to X/\sim$ و $\pi(x) := [x]$.

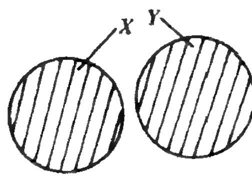
تعریف (فضای خارج‌قسمت[1]). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X باشد. یک مجموعهٔ $U \subset X/\sim$ را در توپولوژی خارج‌قسمت باز می‌گوییم هرگاه $\pi^{-1}(U)$ در X باز باشد. مجموعهٔ $X/\sim$ همراه با توپولوژیی که بدین‌گونه تعریف کردیم، خارج‌قسمت X بر $\sim$ نامیده می‌شود.

یادداشت. روشن است که توپولوژی خارج‌قسمت ریزبافت‌ترین توپولوژی روی $X/\sim$ است به قسمی که π یک نگاشت پیوسته باشد.

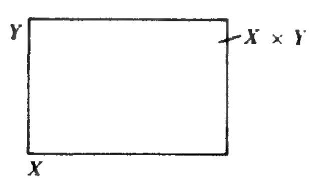
درست همان‌گونه که از مفاهیم زیرفضا، اجتماع جدا از هم، و حاصلضرب، تجسم ذهنی روشنی در دست داریم، و می‌توانیم پایه‌های شهود خود را در ابتدای کار بر پایهٔ آنها بگذاریم، مایلم برای تجسّم ذهنی فضاهای خارج‌قسمت نیز پیشنهادی عرضه کنم.



زیرفضای $X_0 \subset X$



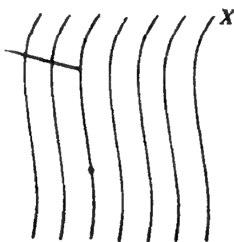
اجتماع جدا از هم $X + Y$

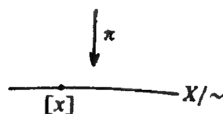


حاصلضرب $X \times Y$

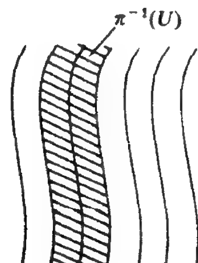
برای درک یک رابطهٔ هم‌ارزی، بهترین کار تجسّم رده‌های هم‌ارزی است؛ هر چند این رده‌های هم‌ارزی، نقاط فضای خارج‌قسمت‌اند، این امر کافی نیست، زیرا احساس ما خواهان یک تصویر هندسی از فضای خارج‌قسمت است که در آن، نقاط فضا واقعاً «نقطه‌هایی» به معنی هندسی آنها باشند:

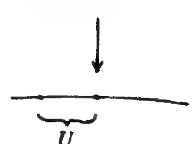
ردهٔ هم‌ارزی
$[x] \subset X$





لذا به‌عنوان مثال



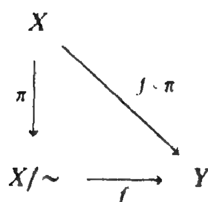


1. quotient space

در دو بخش آینده هر آنچه راکه در «نظریهٔ» فضاهای خارج‌قسمت مورد نیاز ماست می‌گنجانیم، و پس از آن آزادیم که به بخش واقعاً جالب این مبحث، یعنی مثالهایی که واقعاً در ریاضیات پیدا می‌شوند و ابداعات دور از ذهنی نیستند، بپردازیم.

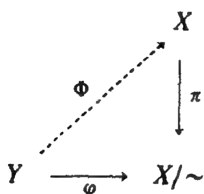
۲. فضاهای خارج‌قسمت و نگاشتها

نکتهٔ ۱ (نگاشتهایی از فضاهای خارج‌قسمت). فرض کنیم Y فضای توپولوژیک دیگری باشد. بدیهی است که نگاشتی چون $f : X/\sim \to Y$ پیوسته است، اگر و تنها اگر نگاشت مرکب $f \circ \pi$ پیوسته باشد:

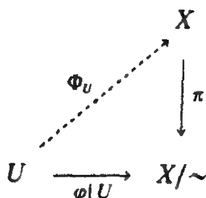


نکتهٔ ۲ (نگاشت به فضاهای خارج‌قسمت). معیار جهانی مشابهی برای پیوستگی نگاشتی به شکل $\varphi : Y \to X/\sim$ وجود ندارد. اما ملاحظهٔ جزئی زیر غالباً سودمند واقع می‌شود: اگر یک نگاشت پیوستهٔ $\Phi : Y \to X$ با شرط $\varphi = \pi \circ \Phi$،

$$\varphi = \pi \circ \Phi,$$



وجود داشته باشد، یا حتی اگر این پدیده فقط موضعی باشد، یعنی اگر برای هر $y \in Y$، یک همسایگی U و یک نگاشت پیوستهٔ $\Phi_U : U \to X$ با شرط $\pi \circ \Phi_U = \varphi|U$، بتوان یافت، آنگاه φ البته



پیوسته است.

۳. ویژگیهای فضاهای خارج‌قسمت

کدام یک از ویژگیهای فضای X به فضای خارج‌قسمت $X/\sim$ منتقل می‌شود؟ همبندی و فشردگی خوشرفتارترین ویژگیها هستند:

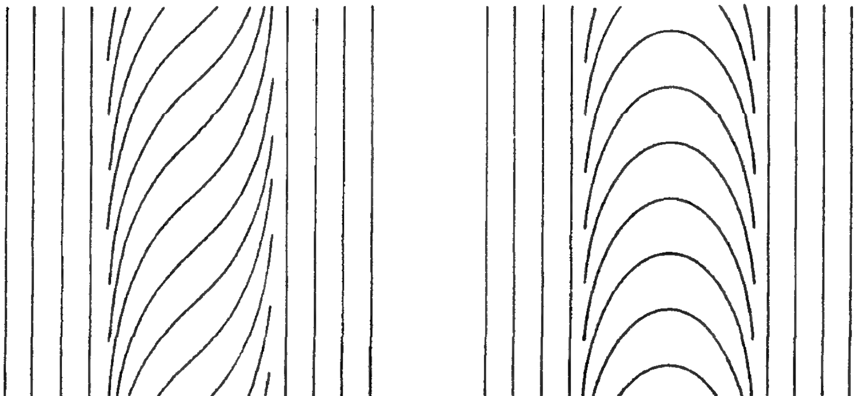
نکتهٔ ۱. اگر X فضایی همبند (همبند ـ راه)، و یا فشرده باشد، $X/\sim$ نیز همبند (همبند ـ راه) یا فشرده است (زیرا این فضا، نگارهٔ پیوستهٔ X است).

در مورد سومین ویژگی فضاها، که در فصل ۱ مورد بحث قرار دادیم، وضع به‌کلی متفاوت است: فضای خارجِ قسمتِ یک فضای هاوسدورف، در حالت کلی، دیگر یک فضای هاوسدورف نیست. یک دلیل سادهٔ این امر آن‌است که ممکن است رده‌های هم‌ارزی، همگی بسته نباشند:

نکتهٔ ۲. یک شرط لازم برای آنکه فضای خارج‌قسمت $X/\sim$ یک فضای هاوسدورف باشد، آن‌است که همهٔ رده‌های هم‌ارزی در X بسته باشند؛ زیرا، اگر $y \notin [x]$ یک نقطهٔ مرزی $[x]$ باشد، آنگاه در فضای $X/\sim$، نمی‌توان $[x]$ و $[y]$ را با همسایگیهایی جدا از هم، از هم جدا کرد.

یک راه دیگر، شاید ظریفتر، برای بیان این منظور چنین است: بسته بودن رده‌های هم‌ارزی در X، با بسته بودن نقاط در $X/\sim$ هم‌ارز است، و می‌دانیم که در یک فضای هاوسدورف همهٔ نقاط، مجموعه‌های بسته‌اند.

بسیار خوب، فرض کنیم که رده‌های هم‌ارزی بسته‌اند: این شرط کاملاً معقول است و بدون آن هیچ چیز درست از آب در نمی‌آید. اما، با تحقق این شرط، چه پیش می‌آید؟ به دو مثال گمراه‌کنندهٔ مشابه زیر توجه کنیم.



در هر دوی آنها $X = \mathbb{R}^2$ با توپولوژی معمولی است، و رده‌های هم‌ارزی زیر خمینه‌های بستهٔ یک بعدی هستند که به‌نحو ساده‌ای مرتب شده‌اند، و تجزیهٔ $\mathbb{R}^2$ به رده‌های هم‌ارزی، حتی براثر انتقال در امتداد محور yها ناوردا است. بعلاوه، این دو مثال، آن‌قدر شبیه‌اند که نمی‌توان اختلاف میان رده‌های هم‌ارزی آنها را به‌کمک ویژگیهای نظری نقطه ـ مجموعه‌ایِ دو رابطهٔ هم‌ارزی، به‌زبان ساده‌ای توصیف نمود، مگر آنکه بگوییم در یکی از آنها فضای خارج قسمت یک فضای هاوسدورف است، اما در دیگری نیست!

آنچه که مستقیماً از این مثالها فرا می‌گیریم این‌است که ویژگیهای جداسازی خارج قسمتها، تا اندازهٔ زیادی بستگی به ترتیب خاص رده‌های هم‌ارزی دارند و باید مرهون وجود قضایایی باشیم که ضامن هاوسدورف بودن رده‌های وسیعی از مثالها هستند.

۴. چند مثال: فضاهای همگن

نخست به یادآوری چند نمادگذاری جبری می‌پردازیم: اگر G یک گروه باشد و $H \subset G$ یک زیرگروه، آنگاه G/H معرّف مجموعهٔ هم ـ مجموعه‌های چپ، $\{gH | g \in G\}$، است، که رده‌های هم‌ارزی برای رابطهٔ هم‌ارزیِ $a \sim b :\Longleftrightarrow b^{-1}a \in H$، روی G، هستند. بعلاوه، اگر H یک زیرگروه نرمال (بهنجار)[1] باشد (یعنی برای هر $g \in H$، $gHg^{-1} = H$)، آنگاه G/H دارای یک ساختار متعارف گروهی خواهد بود که از G گرفته است.

تعریف (گروه توپولوژیک). یک‌گروه G راکه یک فضای توپولوژیک نیزباشد، یک‌گروه توپولوژیک[2] می‌نامند هرگاه نگاشت

$$G \times G \to G, (a, b) \mapsto ab^{-1}$$

پیوسته باشد.

به‌عنوان مثال، گروههای $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ و $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ متشکل از ماتریسهای وارونپذیر $n \times n$، به‌طریق متعارف گروههای توپولوژیک‌اند، و همچنین‌اند گروههای آبلی $(E, +)$، که زیربنای فضاهای برداری توپولوژیک هستند. به‌همین منوال، هر زیرگروه از یک گروه توپولوژیک، مجهز به توپولوژی زیرفضایی، آشکارا یک گروه توپولوژیک است.

1. normal subgroup
2. Topological Group

تعریف (فضای همگن). اگر $H \subset G$ زیرگروهی از یک گروه توپولوژیک G باشد، فضای خارج‌قسمت G/H یک فضای همگن[1] نامیده می‌شود.

بنابراین، تعریف کلی فضای خارج‌قسمت $X/\sim$، که در بخش ۱ آوردیم، در اینجا برای حالت خاص $X = G$ و رابطهٔ هم‌ارزی $a \sim b :\Longleftrightarrow b^{-1}a \in H$ به‌کار رفته است.

چرا فضاهای همگن مورد توجّه ما هستند؟ به‌این پرسش لعنتی که در بسیاری از جاها مطرح می‌شود نمی‌توان در سطح این کتاب کاملاً جواب داد. ولی من سعی خواهم کرد توضیحاتی دربارهٔ آن بدهم. هنگامی‌که در طبیعت به گروههای توپولوژیک برخورد می‌کنیم، معمولاً آنها را به شکل مجرد، به‌عنوان یک مجموعهٔ G همراه با یک قانون ترکیب و یک توپولوژی، به ما نمی‌دهند، بلکه ذاتاً به‌صورت یک گروه تبدیلات، یعنی یک گروه از نگاشتهای دوسویی از یک مجموعهٔ X به‌روی خود X مطرح می‌کنند، که قانون ترکیب در آن، چیزی جز قانون ترکیب نگاشتها نیست. اما لازم نیست که فقط X یک مجموعه و G هم‌گروه کلیهٔ نگاشتهای دوسویی X باشد. بلکه مجموعهٔ X معمولاً مجهز به یک ساختار اضافی: قبل از همه یک توپولوژی، امّا بسته به موقعیت، شاید هم ساختاری دیفرانسیلپذیر یا تحلیلی یا جبری یا متری یا خطّی و یا هر نوع ساختار دیگر است. دراین‌صورت، اعضای گروه G، نگاشتهایی دوسویی، $g : X \to X$، خواهند بود که با این ساختار سازگارند. معمولاً در رابطه با همین است که معلوم می‌شود کدام توپولوژی برای G مناسب است. به‌عنوان مثالی ساده، می‌گیریم $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$: در این‌صورت، مجموعهٔ X فضای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود با ساختار خطی خودش.

آنچه گفتیم، فقط ملاحظاتی در باب گروههای توپولوژیک بود و هنوز از فضاهای همگن صحبتی نکرده‌ایم. اکنون برخی اشیاء ریاضی نظیر A در X یا بر X یا به‌گونه‌ای مربوط به X و ساختار آن را در نظر می‌گیریم: به‌عنوان مثال، یک زیر مجموعهٔ $A \subset X$، یا یک تابع $A : X \to \mathbb{C}$، و یا درواقع هر چیزی که برایش معنی داشته باشد که بگوییم: A به وسیلهٔ عضو $g \in G$، به چیز مشابهی چون gA تبدیل می‌شود و gA نیز به‌کمک $h \in G$ به $(hg)A$ تبدیل می‌شود. برای یک زیر مجموعهٔ $A \subset X$، gA فقط نگارهٔ A است، در حالتی که برای یک تابع $A : X \to \mathbb{C}$، gA تابع $A \circ g^{-1} : X \to \mathbb{C}$ خواهد بود و به‌همین ترتیب در سایر موارد. اکنون دیده می‌شود که مجموعهٔ $H = \{g \in G | gA = A\}$، متشکل از عضوهایی که A را به‌خود A تبدیل می‌کنند، یک زیرگروه G است، و می‌توان فضای همگن G/H را به‌گونه‌ای طبیعی به‌عنوان فضای کلیهٔ موضعهایی در نظر گرفت که A می‌تواند تحت تبدیلات وابسته به اعضای مختلف G اختیار کند. به‌عنوان یک مثال ساده از این فرایند گیریم $G = o(n+k)$ و $X = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ و A زیر فضای $\mathbb{R}^k \times o$ باشد. ماتریسهای متعامدی که $\mathbb{R}^k \times o$ را به خودش

1. homogeneous space

بدل می‌کنند، دقیقاً به‌شکل زیر هستند:

k	h_1	0
n	0	h_2

که در آن $h_1 \in o(k)$ و $h_2 \in o(n)$؛ در این حالت، داریم $H = o(k) \times o(n) \subset o(n+k)$ و فضای همگن $o(n+k)/o(k) \times o(n)$ به «خمینهٔ گراسمانی»[1] زیرفضاهای k بعدی در $\mathbb{R}^{n+k}$ موسوم است. مثلاً، در حالت $k = 1$، فضای همگن $o(n+1)/o(1) \times o(n)$، فضای تصویری حقیقی معروف $\mathbb{RP}^n$ متشکل از خطوط مستقیم گذرنده بر مبدأ در $\mathbb{R}^{n+1}$ است.

اکنون به حالت کلی باز می‌گردیم. چه بسا اتفاق می‌افتد که یک چنین «فضای موضعی» است که اساساً مورد علاقهٔ ماست، و پیدا کردن گروههای G و H، به‌گونه‌ای که بتوان این فضا را به شکل فضای همگن G/H نشان داد، نخستین گام ما در مطالعهٔ آن خواهد بود.

با این مقدمه، نخستین دیدگاهی را که فضاهای همگن را به نظر ما جالب جلوه می‌دهند، تا حدّی مبهم توضیح دادم. یک دیدگاه دوم (که فضاهای همگن را به‌عنوان «مدارات» مطرح می‌کند)، موضوع بخش آینده خواهد بود. اکنون می‌خواهم به دیدگاه سومی که کاملاً عمیق است اشاره کنم. به‌طور خیلی کلی، یکی از اصول بنیادی در بررسی اشیاء هندسی پیچیده، تجزیهٔ آنها به اجزاء ساده‌تر و مطالعهٔ قوانینی است که براساس آنها بتوان کلّ شیء را از روی اجزای آن دوباره ساخت. یک شقّ آن، تجزیهٔ فضا به «تار»[2] هایی مشابه همدیگر است. اما قواعدی که براساس آنها، این تارهای مشابه می‌توانند مجدداً به‌صورت «کلافهای تاری»[3] گرد آیند، به وسیلهٔ یک گروه توپولوژیک، یعنی «گروه ساختاری»[4]، معین می‌شود، و در رابطه با این گروههای ساختاری، فضاهای همگن دوباره وارد صحنه می‌شوند. مثلاً، خمینه‌های گراسمانی $O(n+k)/O(k) \times O(n)$ در رده‌بندی کلافهای برداری[5] نقش عمده‌ای بازی می‌کنند، و اطلاعاتی که از این فضاهای همگن (یعنی خمینه‌های گراسمانی) به‌دست می‌دهند، به‌عنوان یک واسطه، در تجزیه و تحلیل کلافهای برداری به‌کار می‌روند، و کلافهای برداری نیز به نوبهٔ خود ... ولی ادامهٔ بحث، ما را از زمینهٔ اصلی دور خواهد کرد. فقط اجازه بدهید یک نکتهٔ دیگر را هم اضافه کنم: فضاهای همگن، چنانچه در بالا اشاره شد، علاوه برآنکه ابزار مفیدی در انجام هدفهای

1. Grassmannian manifold 2. fibers 3. fiber bundles
4. structure group 5. vector bundles

مستقیم‌اند، به خودی خود نیز به‌عنوان اشیاء هندسی شایان توجّه‌اند، از این لحاظ که هم بسیار متنوع‌اند و هم، به‌عنوان گروههای خارج‌قسمت روشهای نظریهٔ گروههای توپولوژیک (و حتی گروههایی با ساختار غنی‌تر) را می‌پذیرند. «فضاهای متقارن»[1] در هندسهٔ ریمانی نمونه‌های آن هستند.

*

مطالب فوق ما را از حوزهٔ توپولوژی نقطه ـ مجموعه دور کردند: هدف سادهٔ من که متقاعد ساختن شما به پیدایش واقعی فضاهای همگن در ریاضیّات بود، شاید برآورده شده باشد، و می‌توانیم اندک‌اندک به زمینهٔ اصلی خود بازگردیم.

در خاتمه، بار دیگر به مسألهٔ هاوسدورف بودنِ فضاهای خارج‌قسمت باز می‌گردیم. با اینکه ممکن است هاوسدورف بودن این فضاها در حالت کلی بعید به‌نظر آید، ولی برای فضاهای همگن، محک بسیار روشن زیر برقرار است:

لم. یک فضای همگن G/H هاوسدورف است اگر وتنها اگر H در G بسته باشد. (برای اثبات، که چندان دشوار نیست، مراجعه شود به فصل۳، ص۱۲، بورباکی [۲]).

اگر E یک فضای برداری توپولوژیک و E_o یک زیر فضای آن باشد، خارج‌قسمت E/E_o، با توپولوژی خارج‌قسمت، نیز یک فضای برداری توپولوژیک است. از آنجاکه $\overline{E}_o$، یعنی بستار E_o، نیز یک زیرفضای برداری E است، لم فوق ایجاب می‌کند که فضای $E/\overline{E}_o$ همواره یک فضای هاوسدورف باشد، به‌ویژه، فضای $E/\{\overline{o}\}$ که فضای هاوسدورف وابسته به E نامیده می‌شود. مثلاً، چنانچه توپولوژی E با یک نیمنرم $|\cdot\cdot|$ تعریف شده باشد، خواهیم داشت: $\{\overline{o}\} = \{x \in E | |x| = o\}$ و $|\cdot\cdot|$ معرّف یک نرم روی فضای $E/\{\overline{o}\}$ است.

۵. چند مثال: فضاهای مداری

تعریف. گیریم G یک گروه توپولوژیک باشد و X یک فضای توپولوژیک. منظور از یک عمل پیوستهٔ G روی X نگاشتی پیوسته است مانند

$$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto gx$$

به‌قسمی که دو اصل زیر برقرار باشد:

اصل ۱. برای هر $x \in X$، $1x = x$.

1. symmetric spaces

اصل ۲. برای هر $x \in X$ و هر $g_1, g_2 \in X$، $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$.

پس، هر g معرّف یک نگاشت $x \mapsto gx$ از X در خود X است، و دو اصل فوق بیان می‌کنند که این تناظر یک همریختی گروه G در گروه نگاشتهای دوسویی X روی خودش است. نگارهٔ این همریختی، به‌دلیل پیوستگی نگاشت $G \times X \to X$، عملاً در گروه همسانریختیهای X در خود X قرار دارد.

تعریف(G ـ فضا). منظور از یک G ـ فضا[1] ، زوجی است متشکل از یک فضای توپولوژیک X و یک G ـ عمل پیوسته روی X.

G ـ خمینه‌های دیفرانسیلپذیر[2] نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شوند: در این‌صورت، G نه تنها یک گروه توپولوژیک، بلکه در واقع یک گروه لی[3] است (یعنی G خمینه‌ای است دیفرانسیلپذیر و نگاشت

$$G \times G \to G, (a, b) \mapsto ab^{-1}$$

دیفرانسیلپذیر است)، همچنین X نه‌تنها یک فضای توپولوژیک، بلکه در واقع خمینه‌ای است دیفرانسیلپذیر، و عمل $G \times X \to X$ نه تنها پیوسته، بلکه دیفرانسیلپذیر خواهد بود.

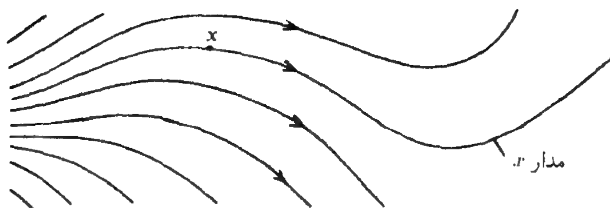
G ـ فضاها و به‌ویژه G ـ خمینه‌ها موضوع نظریهٔ گسترده‌ای هستند به نام نظریهٔ گروههای تبدیلات[4] . مسلماً در اینجا قادر نیستیم به بررسی عمیق این نظریه بپردازیم، اما یک جنبهٔ کوچکی از آن، در رابطه با این فصل، به ما مربوط می‌شود. این جنبه آن‌است که توپولوژی خارج‌قسمت از نخستین مفاهیمی است که در G ـ فضاها نقشی به‌عهده می‌گیرد. هم‌اکنون، این مطلب را شرح می‌دهیم.

تعریف (مدار). اگر X یک G ـ فضا و $x \in X$ نقطه‌ای از آن باشد، مجموعهٔ $Gx := \{gx | g \in G\}$ را مدار[5] ، یا مسیر[6] x، می‌نامند.

بنابراین، مدار عبارت است از مجموعهٔ نقاطی که x می‌تواند براثر عمل اعضای مختلف گروه به‌آن نقاط برده شود. بویژه، چنانچه G گروه جمعی اعداد حقیقی $(\mathbb{R}, +)$ باشد، آنگاه یک G ـ عمل عیناً مثل یک شارش[7] (یافلو) (در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی و انتگرال میدانهای برداری) است. مدارها عبارت‌اند از نگارهٔ خمهای انتگرال و یا مسیرهای شارش، و از همین‌جا، واژهٔ «مسیر»، به‌قیاس،

1. G-space 2. Differentiable G-manifolds 3. Lie group
4. theory of transformation groups 5. orbit 6. trajectory 7. flow

برای هر گروه دلخواه نیز تعمیم یافته است.



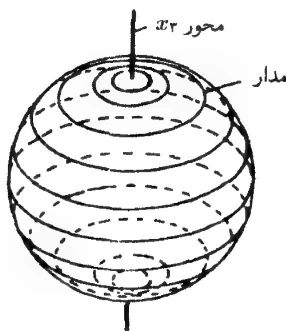
مدارها رده‌های هم‌ارزی برای رابطهٔ هم‌ارزی ~ هستند که چنین تعریف می‌شود: "$x \sim y :\Longleftrightarrow \exists g \in G, y = gx$". پس می‌توانیم توپولوژی خارج‌قسمت را روی مجموعهٔ مدارها در نظر بگیریم.

تعریف (فضای مداری). اگر X یک G ـ فضا باشد، مجموعهٔ مدارها همراه با توپولوژی خارج‌قسمت، فضای مداری[1] نام دارد و با نماد X/G نشان داده می‌شود.

برای روشن‌کردن مطلب فضای مداری را برای یک مثال ساده «محاسبه» می‌کنیم: منظور این‌است که یک همسانریختی بین این فضای مداری و یک فضای توپولوژیک شناخته شده پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $G = \mathrm{SO}(2)$، گروه دورانهای $\mathbb{R}^2$ حول مبدأ باشد، و X کرهٔ یکهٔ $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, \|x\| = 1\}$. اگر G ـ عمل روی X را دوران حول محور x_3، یعنی

$$g(x_1, x_2, x_3) := (g(x_1, x_2), x_3)$$

بگیریم، در این‌صورت مدارها عبارت خواهند بود از دو قطب و دایره‌های موازی، معرّفِ عرضهای جغرافیایی.



1. orbit space

گزاره. $S^۲/G \cong [-۱, ۱]$

برهان. نگاشت پیوستهٔ $\pi_۳ : S^۲ \to [-۱, ۱]$ را که توسط تصویر روی محور $x_۳$ تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم. از آنجا که $\pi_۳$ روی هر مدار ثابت است، معرّف نگاشتی خواهد بود به‌صورت

$$f_۳ : S^۲/G \to [-۱, ۱]$$

به قسمی که نمودار زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & & \\ \pi \downarrow & \searrow^{\pi_3} & \\ S^2/G & \xrightarrow[f_3]{} & [-1, 1] \end{array}$$

به‌علاوه، نگاشت $f_۳$ آشکارا یک نگاشت دوسویی است. پس، بنابر بخش ۲، $f_۳$ پیوسته نیز هست. اما $S^۲/G$ فشرده است، زیرا نگارهٔ پیوستهٔ مجموعهٔ فشردهٔ $S^۲$ است و $[-۱, ۱]$ هاوسدورف. پس، بنابر قضیهٔ پایان فصل ۱، $f_۳$ یک همسانریختی است. همان چیزی که می‌خواستیم. □

سرانجام، نگاهی به خود مدارها می‌اندازیم و یک توپولوژی خارج قسمت هم روی آنها پیدا می‌کنیم.

تعریف (پایدارساز). فرض کنیم X یک Gـ فضا باشد و $x \in X$. مجموعهٔ

$$G_x := \{g \in G | gx = x\}$$

را پایدارساز[۱] یا گروه تکروندی[۲] نقطهٔ x می‌نامیم.

تبصره. تناظر $gG_x \mapsto g_x$ معرّف یک نگاشت دوسویی پیوسته از فضای همگن G/G_x بروی مدار Gx است.

برهان. نخست ملاحظه کنیم که $gG_x \mapsto gx$ واقعاً به پیدایش یک نگاشت خوشتعریف $G/G_x \to Gx$ منجر می‌شود، زیرا برابری $gG_x = hG_x$ مستلزم برابری $h = ga$ به‌ازای مقداری از $a \in G_x$ است، و در نتیجه $hx = gax = gx$. آشکارا دیده می‌شود که این نگاشت، نگاشتی است پوشا، و یک‌به‌یک نیز هست زیرا برابری $gx = hx$ مستلزم $h^{-۱}gx = x$ است، در نتیجه $h^{-۱}g \in G_x$ و $hG_x = gG_x$. پیوستگی آن از بخش ۲ نتیجه می‌شود، زیرا نگاشت مرکب $G \to G/G_x \to Gx$

1. stabilizer 2. isotropy group

پیوسته است. چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

آنچه گفته شد، ارتباط تنگاتنگ میان مدارها و فضاهای همگن را می‌رساند. حال اگر حالت ویژه‌ای راکه G فشرده و X هاوسدورف است، در نظر بگیریم، آنگاه G/G_x فشرده خواهد بود زیرا نگارهٔ پیوستهٔ G است. بنابراین، Gx به‌عنوان زیرفضایی از یک فضای هاوسدورف، فضایی است هاوسدورف و به‌موجب قضیهٔ آخر فصل ۱، ملاحظه می‌شود که $G/G_x \to Gx$ یک همسانریختی است: بنابراین مدارها واقعاً فضاهای همگن «هستند».

۶. چند مثال: فروریزی یک زیرفضا به یک نقطه

تاکنون مثالهایی از توپولوژی خارج‌قسمت را بررسی کرده‌ایم که به سنّت متداول ریاضیات، بادادن توپولوژی معلومی به شیبی که قبلاً به نحوی معلوم بوده، «خودبه‌خود» پیدا می‌شدند. در بخشهای ۶ و ۷، با عمل خارج‌قسمت بیشتر به‌صورت فنّ ظریفی برخورد می‌کنیم که طبق هدفها و مقاصدی معیّن برای ساختن فضاهای توپولوژیک جدیدی با ویژگیهای مطلوب، به‌کار برده می‌شود.

تعریف. فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک و A زیرفضایی ناتهی از آن باشد. منظور از X/A فضای خارج‌قسمتِ $X/\sim_A$ است، که در آن $\sim_A$ رابطهٔ هم‌ارزی است که توسط ضابطهٔ زیر تعریف شده است:

$$x \sim_A y :\Longleftrightarrow x = y \text{ یا } (x \text{ و } y \text{ هردو عضو } A \text{ هستند})$$

بنابراین، رده‌های هم‌ارزی عبارت‌اند از مجموعهٔ A و مجموعه‌های تک نقطه‌ای که در A نیستند. پس، در فضای خارج‌قسمت X/A، A به‌عنوان یک نقطه منظور می‌شود، درحالی‌که مجموعهٔ متممِ $X \backslash A$ بدون تغییر، یعنی همان‌گونه که در X بوده، باقی می‌ماند. اتفاقاً از اینجامعلوم می‌شود که چرا، در حالت خاصّ $A = \varnothing$، توافق شده است که فضای $X/\varnothing$ به‌شکل $X/\varnothing := X + \{\text{یک نقطه}\}$ نشان داده شود. فرایند رفتن از X به X/A، فروریزی[1] A به یک نقطه نامیده می‌شود.

البته، به‌طور مشابه، می‌توان به فروریزی چندین زیرفضا به چند نقطه اشاره کرد. اکنون نمادگذاری مناسبی را برای این فرایند می‌آوریم:

تعریف. اگر X یک فضای توپولوژیک و $A_1, \cdots, A_r \subset X$ زیر مجموعه‌هایی ناتهی و جدا از هم باشند، منظور از $X/A_1, \cdots, A_r$ فضای خارج‌قسمت حاصل از رابطهٔ هم‌ارزی زیر است:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x = y \text{ یا } (\text{ای چنان هست که } x \text{ و } y \text{ هردو عضو } A_i \text{ باشند } i)$$

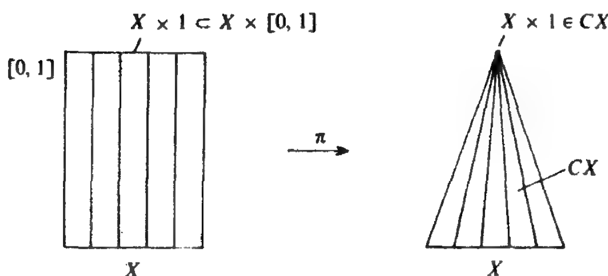
1. collapsing

تبصره. همان‌گونه که قبلاً در بخش ۳ خاطر نشان شد، فضای $X/A_1, \cdots, A_r$ فقط وقتی می‌تواند فضای هاوسدورف باشد، که A_iها همگی بسته باشند. در فضاهای «مناسب»، این شرط، شرط کافی نیز هست. مثلاً، می‌توان به‌سادگی اثبات کرد که اگر X متریکپذیر و A_iها بسته باشند، $X/A_1, \cdots, A_r$ یک فضای هاوسدورف است. البته، نکتهٔ ضروری آن‌است که فقط تعدادی متناهی ردهٔ هم‌ارزی با بیش از یک نقطه داشته باشیم، وگرنه به مثال نقضی که در بخش ۳ دیده بودیم، برمی‌خوریم.

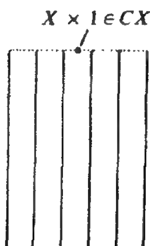
مثال ۱. (مخروط روی یک مجموعه[1].) فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. دراین‌صورت

$$CX := X \times [o, 1]/X \times 1$$

را مخروط روی X می‌نامیم.



دراینجا باز باید این شکل را فقط به‌عنوان یک نگارهٔ ذهنی درنظرگرفت، اما آیا این انتخاب، به‌عنوان یک نگارهٔ ذهنی، انتخاب مناسبی است؟ با توجه به آنکه هنگام ساختن فضای X/A، فضای متمّم $X \backslash A$ دست‌نخورده باقی می‌ماند، آیا نمی‌بایست مخروط را به‌شکل:

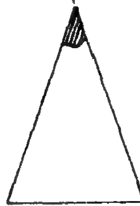


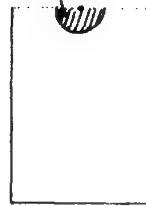
نمایش دهیم؟ جواب منفی است: شکل اخیر تصور نادرستی از توپولوژی مخروط پدید می‌آورد، زیرا، بنابر تعریفِ توپولوژی خارج قسمت، باید نگارهٔ وارونِ هر همسایگی رأس مخروط، یک همسایگی

1. cone over a set

$X \times ۱$، یعنی «دریچهٔ»[1] استوانه باشد، واین هم فقط در شکل نخست حاصل می‌شود، نه در شکل دوم.





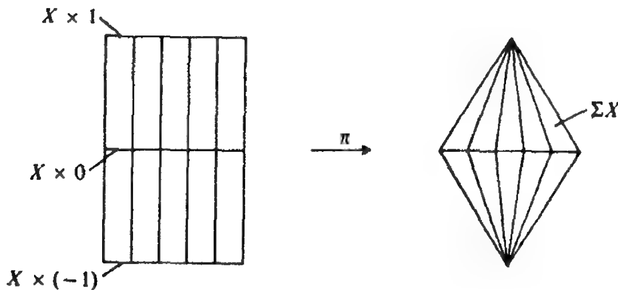


و اما، این واقعیت نیز که تغییری در متمم دریچهٔ استوانه پدید نمی‌آید، در شکل نخست به‌طور کامل رعایت شده است، زیرا این شکل به‌خوبی نشان می‌دهد که تصویر متعارف π یک همسانریختی از $X \times [o, ۱]\backslash X \times ۱$ برروی $CX\backslash\{X \times ۱\}$ به‌دست می‌دهد.

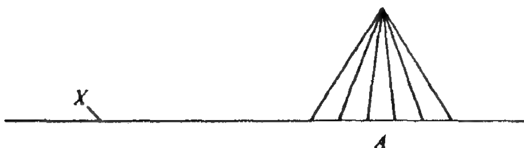
مثال ۲. (فضای تعلیقی). به‌ازای هر فضای توپولوژیک X، فضای $\sum X$ با ضابطهٔ

$$\sum X := X \times [-۱, ۱]/X \times \{-۱\}, X \times \{۱\}$$

را فضای تعلیقی[2] X یا مخروط دوگانه[3] روی X می‌نامند.

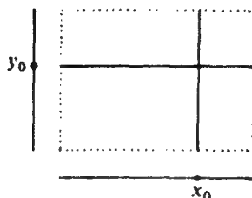


مثال ۳. گاهی، بنابه‌دلایلی، روی فقط بخشی از فضای X یک مخروط بنا می‌کنیم، اما کل فضای X را به‌عنوان «زمینهٔ» این ساختمان محفوظ نگه می‌داریم. دقیقتر بگوییم، چنانچه $A \subset X$، منظور ما از $C_A X$ فضای خارج‌قسمت $(X \times o \cup A \times [o, ۱])/A \times ۱$ است.



1. lid 2. suspension 3. double cone over X

مثال ۴. (حاصلضرب گووه‌یی و حاصلضرب زَخلی). فضاهای توپولوژیک X و Y و نقاط ثابت $x_o \in X$ و $y_o \in Y$ را در نظر می‌گیریم. منظور از حاصلضرب گووه‌یی[1] X در Y، که آن‌را با نماد $X \vee Y$ نمایش می‌دهیم، زیرفضای $X \times y_o \cup x_o \times Y$ از فضای حاصلضرب $X \times Y$ است.



منظور از حاصلضرب زَخلی[2] که با نماد $X \wedge Y$ نمایش داده می‌شود، فضای خارج‌قسمت $X \times Y / X \vee Y$ است.

مثال ۵. (فضای توم[3]) فرض کنیم E یک کلاف‌برداری متریک ریمانی، DE و SE به‌ترتیب کلاف قرصی[4] وکلاف کروی[5] وابسته به E باشند که چنین تعریف می‌شوند:

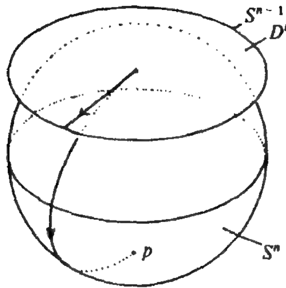
$$DE := \{x \in E | \ \|v\| \leqslant ۱\}$$

$$SE := \{v \in E | \ \|v\| = ۱\}$$

در این‌صورت، فضای خارج‌قسمت DE/SE را فضای توم وابسته به کلاف E می‌نامند.

همهٔ این ساختمانها در توپولوژی جبری ظاهر می‌شوند. اما حالا نمی‌توانم بگویم به چه منظوری به‌کار برده می‌شوند، و می‌پذیرم با مطالبی که تاکنون دیده‌ایم، نمی‌توان حتی آخرین مثال را درک کرد ـ اما من آن‌را فقط برای «روز مبادا» در اینجا گنجاندم. با این وجود بگذارید به ساده‌ترین حالت این مثال، یعنی حالتی که کلاف E فقط یک «تار» دارد: $E = \mathbb{R}^n$، نظر دقیقتری بیندازیم. در این حالت، DE گوی بستهٔ D^n، و SE کرهٔ $S^{n-۱}$ است. ببینیم از فروریزی همهٔ مرزگوی به یک نقطه، چه فضایی به‌دست می‌آید؟ بله؟ یک فضای همسانریخت با کرهٔ n بعدی S^n. برای اثبات، یک نگاشت پیوستهٔ $f : D^n \to S^n$ چنان اختیار می‌کنیم که $S^{n-۱}$ یعنی مرز D^n را به قطب جنوب، p، ببرد وگوی باز $D^n \backslash S^{n-۱}$ را به‌شکل دوسویی روی $S^n \backslash p$ بنگارد (یک مثال از این‌گونه نگاشت f، نگاشتی است که شعاعهای گوی‌باز را به‌طریق عادی روی نیمدایره‌های عظیمهٔ[6] (یعنی «نصف‌النهار[7] های») گذرنده بر قطب شمال و جنوب می‌نگارد).

1. wedge product 2. smash product
۳. Thom space، رنه توم René Thom ریاضیدان معاصر فرانسوی.
4. disc bundle 5. sphere bundle 6. great semicircles 7. meridians



سپس، به‌کمک f، یک نگاشت دوسویی $\varphi : D^n/S^{n-۱} \to S^n$ به‌دست می‌آوریم که در شرط $f = \varphi \circ \pi$ صدق کند:

$$\begin{array}{ccc} D^n & & \\ \downarrow \pi & \searrow f & \\ D^n/S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & S^n \end{array}$$

بنابرآنچه که در بخش ۲ دیده شد، می‌دانیم φ پیوسته است، و بنابراین درواقع یک همسانریختی است، زیرا نگاشتی است دوسویی از فضای فشردهٔ $D^n/S^{n-۱}$ برروی فضای هاوسدورف S^n.

۷. چند مثال: چسباندن فضاهای توپولوژیک به یکدیگر

تعریف. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند و X_o یک زیرفضای X باشد و $\varphi : X_o \to Y$ یک نگاشت پیوسته. رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ را که توسط $x \sim \varphi(x)$ برای هر $x \in X_o$ پدید می‌آید روی فضای $X + Y$ در نظر می‌گیریم و فضای خارج‌قسمت $X + Y/\sim$ را با نماد $X \cup_\varphi Y$ نمایش می‌دهیم. همچنین گفته می‌شود که $X \cup_\varphi Y$ از منضم کردن[1] یا چسباندن[2] X به Y از راه نگاشت چسبانندهٔ[3] φ، و یا از یکی گرفتن[4] نقاط $x \in X_o$ با نگارهٔ آنها تحت φ، یعنی $\varphi(x) \in Y$، به‌دست آمده است.

به‌عنوان احتیاط، دراینجا نیز توضیح خود را تکرار می‌کنم: رده‌های هم‌ارزی یا یک نقطه دارند (هر نقطه از $X+Y$ که نه به X_o متعلق باشد و نه به $(\varphi(X_o))$، ویا به‌شکل $\varphi^{-۱}(y) + \{y\} \subset X + Y$ هستند.

مثال ۱. فرض کنیم X فضایی توپولوژیک باشد و $\varphi : S^{n-۱} \to X$ پیوسته. در این صورت،

1. attaching 2. gluing 3. attaching map 4. identifying

می‌گویند فضای $X \cup_\varphi D^n$ از «چسباندن یک حجره[1]» به X به‌وسیلهٔ نگاشت چسبانندهٔ φ به‌دست آمده است.

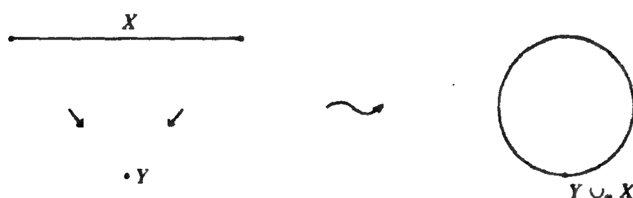


(در فصل هفتم، مجتمعهای CW، یا «ضعیف ـ توپولوژیِ متناهی ـ بستار»، مجدداً از چسباندن حجره‌ها سخن خواهیم گفت).

ببینیم رابطهٔ بین «بلوکهای ساختمانی» X و Y با فضای $X \cup_\varphi Y$ چیست؟ از آنجا که هیچ دو نقطهٔ متمایز Y با هم یکی گرفته نمی‌شوند، همواره Y به‌گونه‌ای متعارف، جزء $X \cup_\varphi Y$ است، و یا دقیقتر بگوییم، نگاشت متعارف $Y \subset X + Y \to Y \cup_\varphi X$ یک‌به‌یک است، و در نتیجه از نوشتن $Y \subset Y \cup_\varphi X$ هیچ‌گونه سوءتفاهمی حاصل نمی‌شود. و به‌علاوه دلیلی هم برای این نوع نوشتن هست، زیرا با بیان $Y \subset Y \cup_\varphi X$، توپولوژی زیرفضایی که Y از $Y \cup_\varphi X$ می‌گیرد، با توپولوژی اولیهٔ خود فضای Y یکی خواهد بود، که اثبات این مطلب ساده است (باید از پیوستگی φ استفاده کنید). پس، به‌خاطر بسپاریم:

نکته. Y به‌طور متعارف زیرفضای $X \cup_\varphi Y$ است.

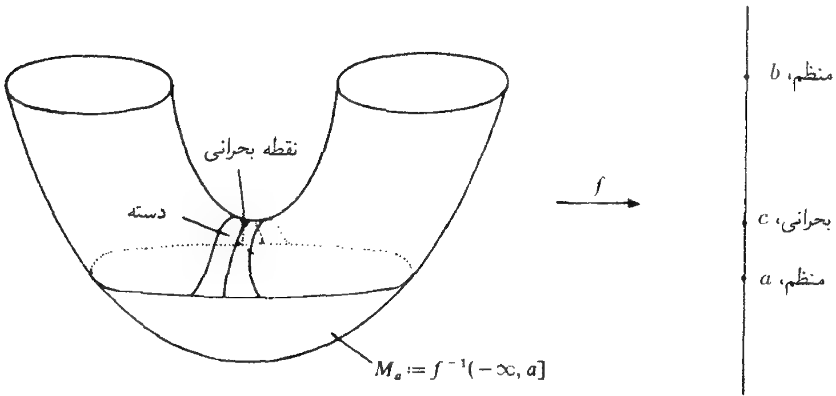
البته، حکم فوق در مورد جزء چسبیده یعنی X، دیگر صادق نیست: هر چند مجموعهٔ متمم $X \backslash X_\circ$ زیرفضای $X \cup_\varphi Y$ است، اما ممکن است خود X براثر نگاشت پیوستهٔ متعارف $X \subset X + Y \to Y \cup_\varphi X$، تغییرات فاحشی پیدا کند. مثلاً، اگر Y منحصر به یک نقطهٔ تنها باشد، فضای $X \cup_\varphi \{\text{نقطه}\}$ دقیقاً همان فضای $X/X_\circ$ است که در بخش ۶ تعریف شد.



1. cell

ولی اگر φ یک همسانریختی از X_o بروی زیرفضائی چون $Y_o \subset X$ باشد، و $\psi : Y_o \to X_o$ را وارون این همسانریختی بنامیم، آشکارا خواهیم داشت $Y \cup_\varphi X = X \cup_\psi Y$، و بنابر نکتهٔ فوق، فضاهای X و Y هر یک به‌شیوه‌ای متعارف، مشمول در $Y \cup_\varphi X$ خواهند بود. مثالهای زیر از این نوع‌اند:

مثال ۲. چسباندن یک «دسته»[1] $D^k \times D^{n-k}$ به یک خمینهٔ مرزدار[2] n بعدی، به‌کمک یک نشاندن $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k} \to \partial M$، همان‌گونه‌که در نظریهٔ مورس[3] صورت‌گرفته است. (به‌عنوان مثال، رجوع شود به مرجع[۱۴]):



چنانچه قرار دهیم $M_y := f^{-1}(-\infty, y]$، در این‌صورت، عبور از یک «نقطهٔ بحرانی»[4] اساساً با چسباندن یک دسته هم‌ارز است:

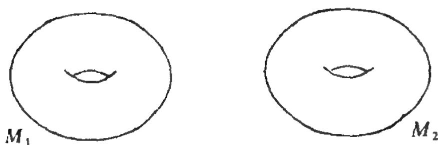
$$M_b \cong M_a \cup_\varphi (D^k \times D^{n-k})$$

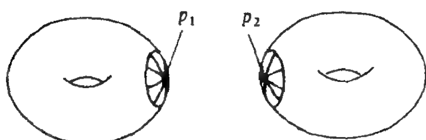
مثال ۳. در توپولوژی دیفرانسیل، «حاصل جمع همبند» دو خمینهٔ M_1 و M_2 را که با نماد $M_1 \# M_2$ نمایش می‌دهند، به‌شکل زیر تعریف می‌کنند:

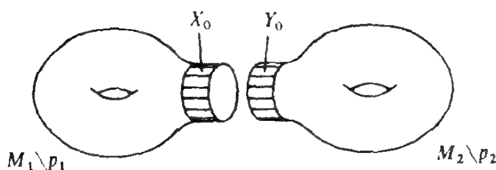
$$M_1 \# M_2 := (M_2 \backslash p_2) \cup_\varphi (M_1 \backslash p_1) \cdot$$

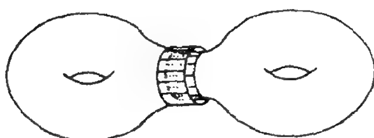
یعنی نخست، با برداشتن یک نقطهٔ دلخواه از هر یک، سوراخی در هر کدام ایجاد می‌کنند، سپس خمینه‌های حاصل را توسط یک نگاشت مناسب φ به‌هم می‌چسبانند (رجوع شود به مرجع [۳]، ص ۱۰۲).

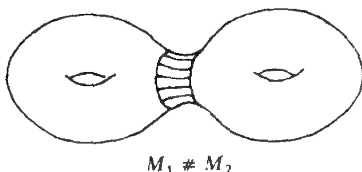
1. handle 2. with boundary 3. Morse 4. critical point









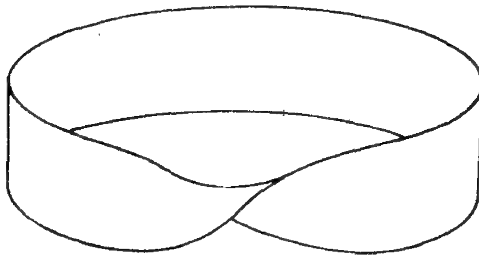


تاکنون، در همهٔ مثالهای فوق، دو فضای X و Y را به‌هم می‌چسباندیم، یعنی خارج‌قسمت $X + Y/\sim$ را تشکیل می‌دادیم. همچنین، می‌توان یک فضای X را به راههای گوناگون به خودش چسباند. بدین طریق که به‌کمک یک نگاشت برخی از نقاط فضای X را با برخی دیگر از نقاط X، باهم «یکی گرفت»، که عیناً مثل این‌است که یک رابطهٔ هم‌ارزی گرفته‌ایم و سپس به فضای خارج‌قسمت

$X/\sim$ رسیده‌ایم. دو مثال معروف، نوار موبیوس[1] و بطری کلاین[2]، از این قبیل‌اند. چون قصد داریم ذیلاً این دو مثال را شرح دهیم، نمادگذاری زیر را وارد می‌کنیم:

نمادگذاری. فرض می‌کنیم X یک فضایی توپولوژیک و $\alpha : X \to X$ یک همسانریختی باشد. منظور از $X \times [o, 1]/\alpha$، فضای خارج‌قسمتِ $X \times [o, 1]$ برآن‌رابطهٔ هم‌ارزی است که با $(x, o) \sim (\alpha(x), 1)$ تعریف می‌شود، که به ویژه معنی آن این‌است که همهٔ نقطه‌های دیگر (x, t)، $o < t < 1$، فقط با خودشان هم‌ارزند.

مثال ۴. (نوار موبیوس). اگر $X = [-1, 1]$ و $\alpha(x) := -x$، آنگاه $X \times [o, 1]/\alpha$ با نوار موبیوس همسانریخت است.

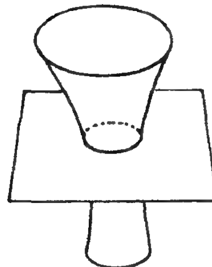


مثال ۵. (بطری کلاین). گیریم $\alpha : S^1 \to S^1$ نگاشت تقارن نسبت به محور xها باشد، یعنی $\alpha(z) := \bar{z}$، که S^1 دایرهٔ‌یکه در صفحهٔ مختلط یعنی $S^1 := \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ منظور شده است. در این‌صورت،

$$S^1 \times [o, 1]/\alpha$$

با «بطری کلاین» همسانریخت است.

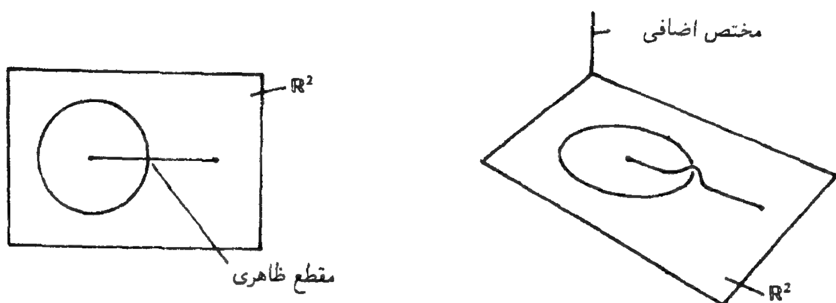
تجسم بطری کلاین ذاتاً آسان نیست، زیرا هیچ زیرفضایی از فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ باآن همسانریخت نیست. برای آنکه ببینیم «به چه می‌ماند»، باید به ترفند «مقطع ظاهری»[3] متوسل شویم. برای تجسم این ترفند، به‌شکل زیر توجه کنید:



1. Möbius strip 2. Klein bottle 3. apparent intersection

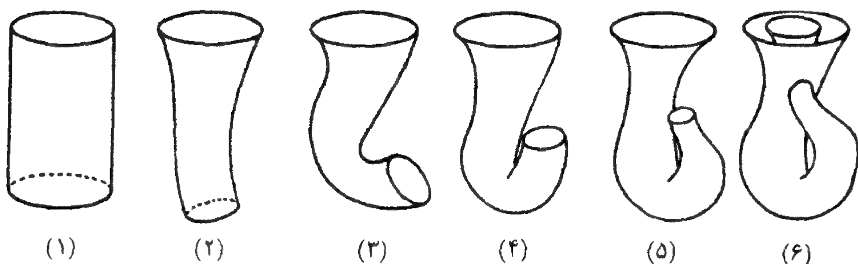
معمولاً آن‌را چنین تعبیر می‌کنیم: زیر مجموعه‌ای است از $\mathbb{R}^۳$، حاصل از اجتماع یک مستطیل و یک قیف، که در یک دایره همدیگر را قطع می‌کنند. اما، چنانچه از ما خواسته شود که فقط این مقطع را که ظاهر شده است در نظر بگیریم، در آن صورت شکل فوق معنای کاملاً متفاوتی پیدا می‌کند. دیگر به هیچ‌وجه آن زیر مجموعهٔ $\mathbb{R}^۳$ نیست، بلکه مسلماً تلاشی است ناقص برای نمایش فضای حاصلجمع توپولوژیک و لذا جدا از همِ مستطیل و قیف. پس، در این فضا، این دایره دوبار منظور می‌شود: یک‌بار در مستطیل و یک‌بار در قیف. برخلاف آنچه که در آغاز، شکل فوق به ذهن ما القا کرده است، دیگر نمی‌توان به‌گونه‌ای پیوسته از قیف به مستطیل رسید.

اگر می‌خواهید به شیوهٔ ملموستری به‌این پدیده بیندیشید، فضای مسأله را زیرفضایی از $\mathbb{R}^۴$ تصور کنید و این شکل را تصویر آن فضا روی $o \times \mathbb{R}^۳$. می‌توان فرض کرد که مستطیل مورد بحث کلاً در فضای $o \times \mathbb{R}^۳$ قرار دارد و برای قیف هم، مختص چهارم نامرئی آن اساساً صفر است، جز در پیرامون مقطع ظاهری که مثبت خواهد بود. چنین موقعیتی را می‌توان، به قیاس دو ـ بعدی، در شکل زیر روشن نمود:

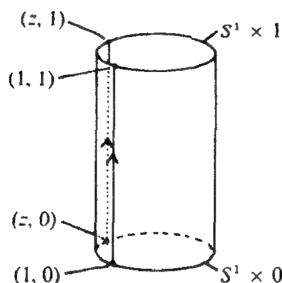


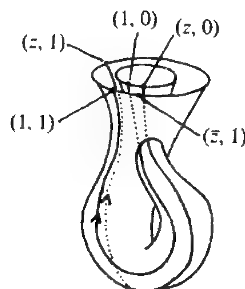
ولی هنگامی‌که برای درک بعضی از ویژگیهای فضای مفروضی می‌خواهید از شکلی حاصل از مقاطع ظاهری استفاده کنید، متوجّه خواهید شد که اصلاً نیازی به‌این بعد چهارم کمکی ندارید، بلکه فقط کافی است که آمادگی داشته باشید دو جزء مقطع ظاهری را ذهناً از هم جدا کنید.

در این باب، می‌توانیم یک استوانهٔ $S^۱ \times [o, ۱]$ مجهز به یک خود ـ بُریِ ظاهری به شکل(۶) را که به‌تدریج از شکل (۱) به‌دست آمده چنین مجسّم کنیم:

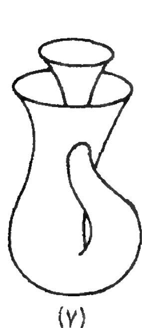


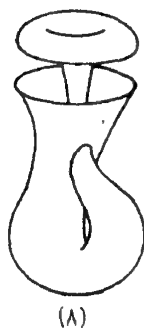
در رشتهٔ (۱) تا (۶)، حرکت در این جهت است که نشان دهد کدام نقطهٔ (۱) متناظر با کدام نقطهٔ (۶) است. «تهِ» شکل (۱) در گذر از (۱) به (۶) صرف‌نظر از انتقال و باریک شدن انتها، «تا» می‌شود و دقیقاً یک بار از محور واصل به نقاط $(1, o)$ و $(-1, o)$ عبور می‌کند. بنابراین، در (۶)، زوجهایی که قرار است با هم یکی گرفته شوند، یعنی (z, o) و $(\overline{z}, 1)$، دقیقاً در مقابل همدیگر قرار می‌گیرند، و





کافی است دایرهٔ مرزی داخلی را اندکی بزرگ کنیم تا بر دایرهٔ بزرگتر منطبق شود و بدین ترتیب، تجسّمی فضایی از رابطهٔ هم‌ارزیِ یکی‌گیری، که منجر به تعریف بطری کلاین می‌شود، حاصل آید. جز این نکته که نمی‌خواهیم محل بخیه به‌صورت لبهٔ تیزی درآید (دلیلی ندارد که متمایز از بقیّهٔ «مدارها»[1] مجسّم شود). در نتیجه، به‌روش زیر عمل می‌کنیم:


(۷)


(۸)


(۹)

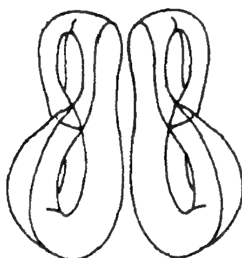

(۱۰)

پس، آنچه در (۱۰) به‌دست آورده‌ایم، بطری کلاین است، که با یک خود ـ بُریِ ظاهری، کاملاً نمایانده شده است.

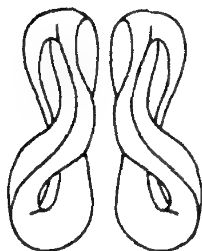
---

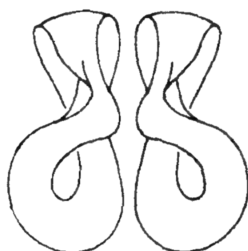
1. parallels of latitude

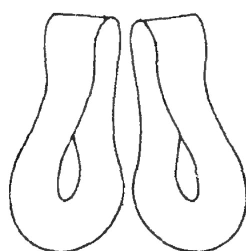
حال، اگر این اسباب پیچیده را برای دیدن چگونگی درون آن به دونیمه کنیم، و سپس هر یک از دو



نیمهٔ مقطع ظاهری را با دقت از هم بازکنیم، پس از اندکی صافکاری و هموارسازی، دو نوار موبیوس به‌دست می‌آوریم







باز، از نو، اگر فرایند عکس را دنبال کنیم: می‌بینیم که با چسباندن دو نوار موبیوس M در طول مرزهایشان، به بطری کلاین دست می‌یابیم:

$$M \cup_{\mathrm{Id}_{\partial M}} M \cong K$$

خوب! . . . آیا می‌شود این نحوهٔ بیان ما را استدلال نامید؟ به‌هیچ‌وجه. یک برهان، می‌بایستی چیزی شبیه این باشد: نخست نگاشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$([-۱, ۱] \times [o, ۱]) + ([-۱, ۱] \times [o, ۱]) \to S \times [o, ۱]$$

بدین طریق که برای جمعیدهٔ اول، می‌نویسیم

$$(\theta, t) \mapsto (e^{\pi i\theta/۲}, t)$$

و برای جمعیدهٔ دوم

$$(\theta, t) \mapsto (-e^{-\pi i\theta/۲}, t)$$

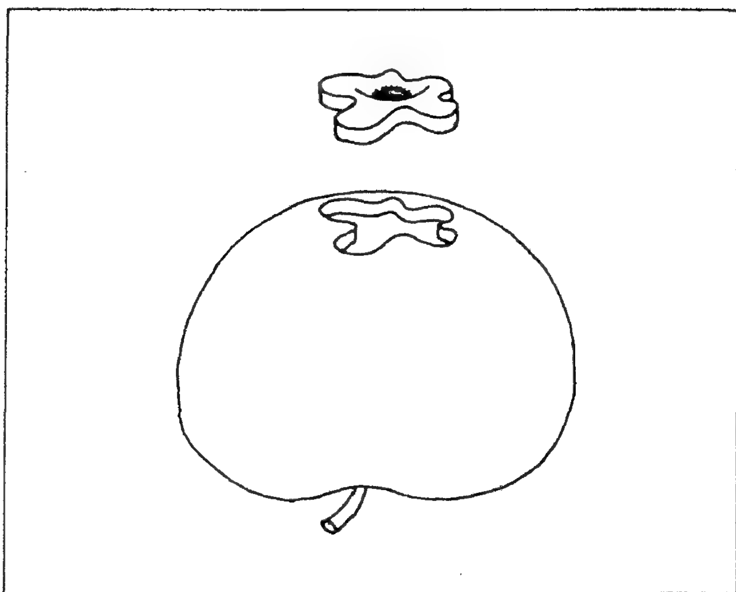
سپس، ثابت می‌کنیم که این بیان به پیدایش یک نگاشت دوسویی خوشتعریف: $M \cup_{\mathrm{Id}_{\partial M}} M \to K$ منجر می‌شود. بعد، با استفاده از نکتهٔ۱، بخش۲، پیوستگی این نگاشت دوسویی را ثابت می‌کنیم و سرانجام، قضیهٔ آخرِ فصل اول را که می‌گوید یک نگاشت دوسوییِ پیوسته از یک فضای فشرده به یک فضای هاوسدورف، همواره یک همسانریختی است، به‌کار می‌بریم.

*

غالباً در مخالفت با استدلال شهودی فضایی، چنین گفته می‌شود که این نوع استدلال در واقع یک استدلال نیست، بلکه فقط رسانیدن مقصود به کمک «حرکات سر و دست» است. پس، آیا باید هرگونه استدلال شهودی را کنار بگذاریم؟ مسلّماً نه. تا زمانی‌که این استدلال از پشتوانهٔ استاندهٔ طلایی برهانهای قوی برخوردار است، اجازه نامهٔ ارزشمند استفاده از حرکات سر و دست، کمک گرانبهایی به ارتباط مستقیم و تبادل سریع افکار است. پس زنده‌باد حرکات سر و دست!

۴

تکمیل فضاهای متری



۱. تکمیل یک فضای متری

مطالب این فصل درواقع مربوط به متریک فضاهای متری است، و نه فقط توپولوژیی که متریک به‌این فضاها می‌دهد؛ ولی عادت براین جاری، و بجا نیز هست، که فضاهای متری در رده‌بندی توپولوژی

نقطه ـ مجموعه مورد مطالعه قرارگیرد، ولی ما در مورد این تفاوت، تعصّبی نشان نمی‌دهیم.

یادآوری می‌کنیم که یک دنبالهٔ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ از نقاط یک فضای متری (X, d) را دنبالهٔ کوشی[1] گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، n_0 ی موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $n, m \geqslant n_0$، نامساوی $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ برقرار باشد. فضای متری (X, d) را کامل[2] گویند اگر هردنبالهٔ کوشی درآن همگرا باشد.

مثلاً، خط حقیقی $\mathbb{R}$، با متریک معمولی $d(x,y) := |x-y|$ ـ چنانچه هردانشجوی ریاضی در اوایل تحصیل خود متوجه (اصل کمال در اعداد حقیقی) خواهد شد ـ فضایی است کامل؛ ازاین‌رو، $\mathbb{R}^n$ نیز، با متریک معمولی خود، کامل است؛ فضاهای هیلبرت و باناخ، طبق تعریف، کامل‌اند؛ هرفضای متری فشرده، یک فضای متری کامل است، و بالاخره هرگاه به‌این نکتهٔ ساده توجه کنیم که هر زیرفضای یک فضای متری کامل، یعنی هر زیرمجموعهٔ $A \subset X$ با متریک $d|A \times A$، کامل است اگر و فقط اگر A در X بسته باشد، آنگاه می‌توانیم شمار بسیار زیادی مثالهای دیگر به‌دست آوریم.

پس ازاین یادآوری مختصر، منظور ما از تکمیل[3] یک فضای متری، فرایند افزودن کمترین نقاط ممکن به‌یک فضای ناکامل (X, d) برای به‌دست آوردن یک فضای کامل $(\hat{X}, \hat{d})$ است.

تعریف (فضای تکمیلی). فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. فضای متری $(\hat{X}, \hat{d})$ را فضای تکمیلی (X, d) گویند هرگاه $X \subset \hat{X}$ و $d = \hat{d}|X \times X$، و به‌علاوه:

۱) فضای $(\hat{X}, \hat{d})$ کامل باشد،

۲) X در $\hat{X}$ چگال[4] باشد، به‌عبارت دیگر $\overline{X}$، بستار X در $\hat{X}$، باخود $\hat{X}$ برابر باشد.

شرط دوم دقیقاً می‌گوید که $\hat{X}$ یک فضای کامل مینیمال است به‌گونه‌ای که X زیرفضای $\hat{X}$ است: ازآنجا که X چگال است، هرنقطهٔ «جدید» $\hat{x} \in \hat{X} \backslash X$ حد یک دنبالهٔ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ از نقاط X است، و چنانچه $\hat{x}$ را حذف کنیم، دنبالهٔ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ به‌یک دنبالهٔ کوشی ناهمگرا در $\hat{X}$ بدل می‌شود و کمال از بین می‌رود. آیا هرفضای متری را می‌توان تکمیل کرد، و اگر چنین است، چند راه برای آن وجود دارد؟ در این‌گونه موارد، یک روش سنتی پسندیده آن‌است که نخست به مسألهٔ یکتایی پرداخته شود. درمورد مسألهٔ مورد بحث ما، اثبات یکتایی، به‌موجب گزارهٔ زیر خیلی ساده است.

گزاره (یکتایی فضای تکمیلی). اگر $(\hat{X}, \hat{d})$ و $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ فضاهای تکمیلی فضای متری (X, d) باشند، دقیقاً یک طولپایی $\hat{X} \overset{\cong}{\rightarrow} \widetilde{X}$ هست که تحدیدش به X نگاشت همانی است.

---

1. Cauchy sequence 2. complete 3. completion 4. dense

برهان. اگر (x_n) دنباله‌ای کوشی از نقاط X باشد، نگارهٔ $x = \lim x_n$ براثر چنین طولپایی، البته باید حد دنبالهٔ (x_n) در $\widetilde{X}$ باشد که، بنابر فرض، وجود دارد. پس، حداکثر یک چنین طولپایی بیشتر موجود نیست. برعکس، اگر (x_n) و (y_n) دو دنبالهٔ کوشی در X و $\hat{x}, \hat{y}$ (به‌ترتیب $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$) حدود آنها در $\hat{X}$ (به‌ترتیب در $\widetilde{X}$) باشند، آنگاه داریم

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim d(x_n, y_n) = \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$$

پس، یک نگاشت $\hat{X} \to \widetilde{X}$ که توسط $\hat{x} \mapsto \widetilde{x}$ داده می‌شود، اولاً خوشتعریف است، و درثانی ویژگی مطلوب را داراست، یعنی یک طولپایی است که شرط $x \mapsto x$ را برای هر $x \in X$ برآورده می‌کند، همان چیزی که می‌خواستیم. □

باتوجه به مطالب فوق می‌توان گفت که («باتقریب یک طولپایی متعارف») حداکثر یک فضای تکمیلی برای (X, d) وجود دارد، و به‌همین دلیل، در بیشتر موارد، چگونگی تکمیل اصلاً اهمیتی ندارد، به‌شرط آنکه نخست شدنی بودن آن برما معلوم باشد. هنگامی‌که X زیرفضایی متری از یک فضای متری کامل Y باشد، یافتن یک فضای تکمیلی برای X به‌طور طبیعی بسیار آسان است: کافی است بستار X در Y را اختیارکنیم. در مثالهای زیر، $Y = \mathbb{R}^2$، و X در هرمورد زیرفضایی است همسانریخت با $\mathbb{R}$:

مثال ۱. $X = \mathbb{R}$، کامل است.

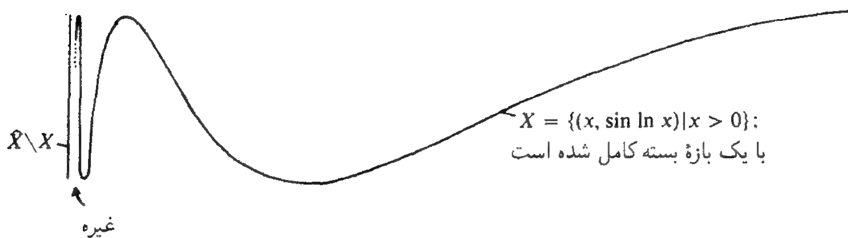
مثال ۲. X یک نیمخط باز است، که باافزودن یک نقطه تکمیل می‌شود.



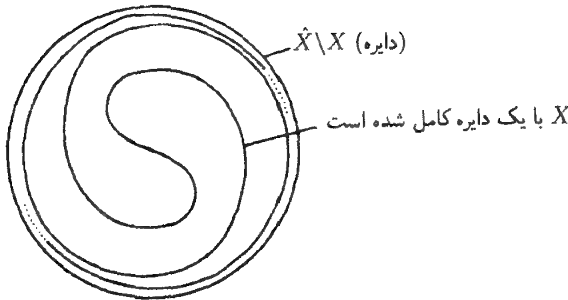
مثال ۳. X بازه‌ای است بازکه باافزودن دو نقطه تکمیل می‌شود.



مثال ۴. $X = \{(x, \sin \ln x) | x > o\}$ که باافزودن یک بازهٔ بسته تکمیل می‌شود.



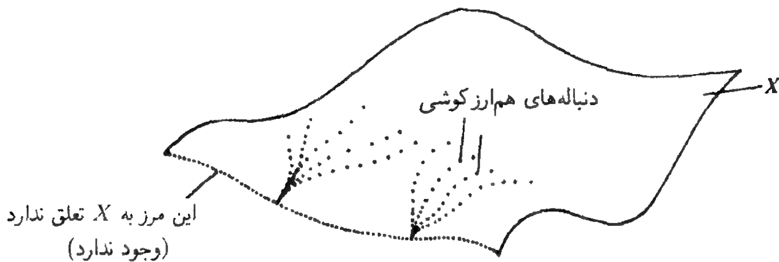
مثال ۵.



X خمی است در داخل یک قرص، که با دایرهٔ مرزی تکمیل می‌شود.

این مثالها را از آن رو آورده‌ایم تا مستقیماً نشان دهیم که فضاهای همسانریخت ممکن است فضاهای تکمیلی به‌غایت ناهمسانریختی داشته باشند.

حال به مسألهٔ ساختن فضای تکمیلی یک فضای متری دلخواه (X, d) می‌پردازیم. روشن است که باید نقاط تازه‌ای ایجاد کنیم که مقادیر حدی دنباله‌های ناهمگرای کوشی باشند (همان نقاطی که قبلاً نقاط «آرمانی»[1] نامیده می‌شدند، و درواقع، به‌بیان دقیق، این نامگذاری مستلزم عدم وجود این نقاط بود). به‌علاوه، دو دنبالهٔ ناهمگرای کوشی $(a_n)_{n\geqslant 1}$ و $(b_n)_{n\geqslant 1}$ «نقطهٔ حدی آرمانی»[2] مشترکی چون $\hat{x}$ دارند اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = o$، زیرا فقط و فقط در این‌صورت است که باید دنباله‌های نامبرده حد مشترکی در یک فضای تکمیلی X داشته باشند.



اما این نقاط $\hat{x}$ را ازکجا پیدا کنیم؟ در این‌گونه موارد، از امکانات «بهشت برین» کانتور (به‌زعم هیلبرت)، یعنی نظریهٔ مجموعه‌ها، استفاده می‌کنیم: خیلی ساده، یک ردهٔ هم‌ارزی از دنباله‌های ناهمگرای کوشی را درنظر می‌گیریم و خود همین ردهٔ هم‌ارزی را به‌عنوان نقطهٔ حدی آرمانی آن دنباله‌ها اختیار می‌کنیم!

لم (وجود فضای تکمیلی). فرض می‌کنیم (X, d) یک فضای متری و $\mathscr{N}$ مجموعهٔ

1. ideal points 2. ideal limit point

دنباله‌های ناهمگرای کوشی در X باشد. دو دنبالهٔ کوشی (a_n) و (b_n) را هم‌ارز خوانیم هرگاه $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = o$. مجموعهٔ $\hat{X}$ را به‌عنوان اجتماع جدا ازهم $X + \mathscr{N}/\sim$ و فاصلهٔ $\hat{d}$ را روی $\hat{X}$ بادستورهای زیر، برای هر $x, y \in X$ و همهٔ رده‌های هم‌ارزی $a = [(a_n)]$ و $b = [(b_n)]$ در $\mathscr{N}/\sim$، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\hat{d}(x,y) &:= d(x,y),\\ \hat{d}(x,a) = \hat{d}(a,x) &:= \lim_{n\to\infty} d(a_n, x)\\ \hat{d}(a,b) &= \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)\end{aligned}$$

دراین‌صورت، یک نگاشت خوشتعریف $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$ به‌دست می‌آید به‌گونه‌ای که $(\hat{X}, \hat{d})$ یک فضای تکمیلی فضای (X, d) است.

برهان. ... استدلال ازآن نوع استدلالهایی است که هیچ‌کس نمی‌تواند باشرح و تفصیل بیشتر آن‌را روشنتر سازد. به‌ترتیب ثابت می‌شود که $\hat{d}$ خوشتعریف است، $\hat{d}$ در اصول موضوعهٔ متریک صدق می‌کند، X در $\hat{X}$ چگال است، و سرانجام $(\hat{X}, \hat{d})$ کامل است. برسبیل احتیاط بگذارید خاطر نشان کنم که اعضای یک دنبالهٔ کوشی $(\hat{x}_n)$ لازم نیست همگی در X باشند. دنباله‌هایی چون $(x_{nk})_{n\geqslant 1}$ را در X چنان انتخاب می‌کنیم که به‌یکی از دو صورت زیر باشند: یا $\hat{x}_n = [(x_{nk})_{k\geqslant 1}]$، و یا اگر $\hat{x}_n \in X$، آنگاه برای هر k، $x_{nk} = \hat{x}_n$. دراین‌صورت، به‌ازای یک دنبالهٔ مناسب از اعداد طبیعی $k_1 < k_2 < \cdots$، دنبالهٔ $(x_{nk_n})_{n\geqslant 1}$ یک دنبالهٔ کوشی است و $(\hat{x}_n)$ به‌سوی حد خود همگرا خواهد شد ... همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

همهٔ ما، هم خواننده و هم مؤلف، به‌این فوت‌وفن کار با رده‌هایِ هم‌ارزیِ دنباله‌هایِ ناهمگرایِ کوشی، به‌عنوان یک وسیلهٔ انتقال صوری، ارزش می‌گذاریم، و درعین‌حال، هیچ‌یک از ما دست از شهود خود برنمی‌داریم و تأمل در این‌باره را که این‌گونه دسته‌های شگفت‌انگیز دنباله‌های کوشی، واقعاً نقاط حدّیِ آرمانی هستند، آغاز می‌کنیم. اما ببینید که دستهای نااهل، خصوصاً در مدارس، می‌تواند چه بلاهایی برسر نظریهٔ مجموعه‌ها بیاورد! ... بگذریم، مهم نیست.

در خاتمه، اشارهٔ جانبی مختصری به مسألهٔ بیان و ارائهٔ مطالب می‌کنیم. می‌توانستیم، شاید به‌طور ظریفتر، فضای تکمیلی را به‌شیوهٔ زیر تعریف کنیم: فرض می‌کنیم $\mathscr{C}$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های (همگرا و ناهمگرا)ی کوشی در X باشد. قرار می‌دهیم $\hat{X} = \mathscr{C}/\sim$ و $\hat{d}([a_n], [b_n]) = \lim d(a_n, b_n)$. دراین‌صورت، $(\hat{X}, \hat{d})$ یک فضای متری کامل است، و اگر به X از طریق $x \mapsto [(x)_{n\geqslant 1}]$، به‌صورت یک زیرمجموعهٔ $\hat{X}$ «نگاه کنیم» $(\hat{X}, \hat{d})$ یک فضای تکمیلی (X, d) خواهد بود. (برهان: ...).

زیرا، در موارد مشابه، غالباً این نحوهٔ بیان ترجیح داده می‌شود. آیا می‌شود کسی هیأت اعداد مختلط را به‌شکل $\mathbb{C} := \mathbb{R} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq o\}$، مجهز به فلان و بهمان قوانین ترکیب معرفی کند؟ البته نه؛ طبعاً $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ را یک مجموعه می‌گیرند و بقیهٔ ماجرا؛ سپس اعلام می‌کنند که بعداً $\mathbb{R}$ باید از طریق $x \mapsto (x, o)$ به‌عنوان یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{C}$ «منظور شود». معهذا باید اعتراف کنم که هر بار مطلب فوق را به دانشجویان مبتدی اعلام می‌کنم، احساس ناخرسندی به‌من دست می‌دهد ....

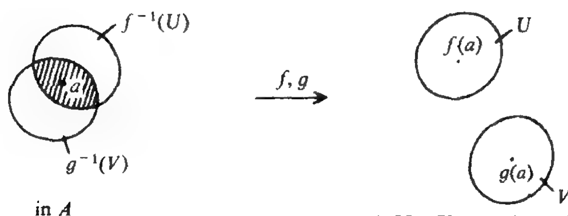
۲. تکمیل یک نگاشت

فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد و $f : X \to Y$ نگاشتی پیوسته. در چه شرایط و چگونه می‌توان f را به‌یک نگاشت پیوستهٔ $\hat{f} : \hat{X} \to Y$ توسیع داد؟

نخست یک تذکر مقدماتی لازم است. حداکثر یک راه برای این توسیع وجود دارد:

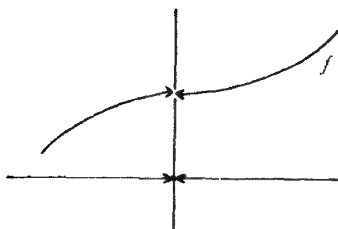
گزاره. فرض می‌کنیم A یک فضای توپولوژیک و $X \subset A$ زیرمجموعه‌ای چگال باشد، یعنی $\overline{X} = A$ و فرض می‌کنیم $f, g : A \to B$ دو نگاشت پیوسته از A به‌یک فضای هاوسدورف B باشند که روی X برهم منطبق‌اند. دراین صورت $f = g$.

برهان. اگر f و g در نقطه‌ای چون $a \in A$ متمایز باشند، آنگاه در تمامی یک همسایگی نقطهٔ a مانند $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ متمایز خواهند بود، پس $a \notin \overline{X}$، و این‌هم متناقض بافرض گزاره است، همان چیزی که می‌خواستیم. □

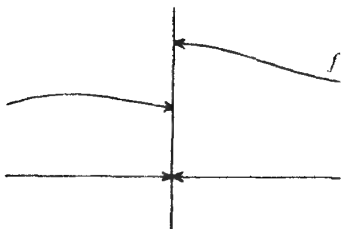


در B: همسایگیهای جدا از هم U و V را برای $f(a)$ و $g(a)$ انتخاب کرده‌ایم ...

ازگزارهٔ فوق به‌ویژه نتیجه می‌شود که یک نگاشت پیوسته ازیک فضای متری X به‌یک فضای هاوسدورف، حداکثر به‌یک شیوه به فضای تکمیلی $\hat{X}$ توسیع داده می‌شود. اما گاهی به هیچ‌وجه توسیع ممکن نیست، و درواقع، چنانچه در مثالهای زیر دیده می‌شود، دوگونه مانع متفاوت برسر راه وجود دارد:



مثال ۲: $X = \mathbb{R}\backslash o, \hat{X} = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}\backslash 1$



مثال ۱: $X = \mathbb{R}\backslash o, \hat{X} = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$

در مثال ۱، f در نقطهٔ o دارای یک «جهش» است و درنتیجه نمی‌تواند توسیع پیوسته داشته باشد. در مثال ۲، f دارای جهش نیست، اما تنها مقداری که می‌تواند برای یک توسیع پیوسته ضروری باشد، از حوزهٔ عکس مقادیر «برداشته» شده است. اکنون فرض می‌کنیم که Y نیز یک فضای متری باشد و این دو مشکل را باافزودن فرضهای مناسبی مرتفع می‌کنیم. برای آنکه تضمین کنیم که حوزهٔ عکس مقادیر تابع هیچگونه «حفره‌ای» ندارد، روش سادهٔ ما این‌است که فضای تکمیلی آن‌را درنظر می‌گیریم: و برای اجتناب از جهشهای f در نقاط آرمانی، آن‌را یکنواخت ـ پیوسته فرض می‌کنیم.

یادآوری کنیم که اگر (X, d) و (Y, d') فضاهای متری باشند، یک نگاشت $f : X \to Y$ را یکنواخت ـ پیوسته[1] نامند هرگاه برای هر $\varepsilon > o$ای مثبت $\delta > o$ وجود داشته باشد به‌قسمی که، برای هر $a, b \in X$ باشرط $d(a, b) < \delta$، نابرابری $d'(f(a), f(b)) < \varepsilon$ برقرار باشد.

لم (تکمیل نگاشتها). فرض می‌کنیم (X, d) و (Y, d') فضاهای متری باشند و $f : X \to Y$ یک نگاشت یکنواخت ـ پیوسته باشد. دراین صورت، چنانچه $(\hat{X}, \hat{d})$ و $(\hat{Y}, \hat{d}')$ به‌ترتیب فضاهای تکمیلی (X, d) و (Y, d') باشند، آنگاه یک و تنها یک توسیع f به‌یک نگاشت پیوستهٔ $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ وجود دارد.

برهان. به‌علّت پیوستگی یکنواخت، دنباله‌های کوشی به دنباله‌های کوشی بدل می‌شوند، و هم‌ارزی این دنباله‌ها نیز محفوظ می‌مانند. پس، اگر $\hat{f}$ را باضابطهٔ $\hat{f}(\lim_{n\to\infty} x_n) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ تعریف کنیم، f به‌گونه‌ای خوشتعریف به‌یک نگاشت $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ توسیع داده می‌شود، که در دستور فوق $(x_n)_{n\geqslant 1}$ معرّف یک دنبالهٔ ناهمگرای کوشی در X است و حدّهای دو طرف برابری فوق، به‌ترتیب در $\hat{X}$ و $\hat{Y}$ گرفته شده‌اند. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\hat{f}$ پیوسته و حتی یکنواخت ـ پیوسته است... همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

مخصوصاً، به‌طور گذرا باید توجه داشت که طولپاییها همواره یکنواخت ـ پیوسته‌اند ($\delta = \varepsilon$)، و درنتیجه، اگر $f : X \overset{\cong}{\to} Y$ یک طولپایی باشد، نگاشت تکمیلی آن $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ نیز آشکارا یک طولپایی خواهد بود.

---

1. uniformly continuous

۳. تکمیل فضاهای نرمدار

تعجب‌آور نیست اگر مفهوم «کمال» درمورد فضاهای تابعی آنالیز آن‌قدر مهم باشد، زیرا توابع جالب توجه، «جوابهای» هر مسأله‌ای که باشند، غالباً به‌کمک حدگیری از دنباله‌های تابعی به‌دست می‌آیند. همان‌گونه که قبلاً در فصل ۲، بخش ۵، خاطر نشان ساختیم، می‌توان از «دنباله‌های کوشی» و درنتیجه از کمال[1] و عدم کمال[2] در فضاهای برداری توپولوژیک دلخواه صحبت کرد. چنانچه خواسته باشیم چارچوبی اصولی برای این مفاهیم در فضاهای توپولوژیک بنا کنیم، به مفهوم «فضاهای یکنواخت»[3] کشیده می‌شویم: ساختاری که بین ساختار فضاهای متری و ساختار فضاهای توپولوژیک واقع است (هر فضای متری بالاخص یک فضای یکنواخت است و هرفضای یکنواخت حالت خاصی از یک فضای توپولوژیک)، و می‌توانیم به‌همان طریقی که با فضاهای متری عمل می‌کردیم، به تکمیل فضاهای یکنواخت بپردازیم. هرفضای برداری توپولوژیک، به طریقی متعارف یک فضای یکنواخت هم هست. اما، دراین بخش، ما خود را به فضاهای برداری توپولوژیک نرمدار محدود می‌کنیم.

مطلب را با دو ـ سه نکته که جنبهٔ کلی دارند و به‌سادگی قابل اثبات‌اند آغاز می‌کنیم: فضای تکمیلی یک فضای نرمدار $(E, \|\cdot\cdot\|)$ به طریقی متعارف یک فضای باناخ $(\hat{E}, \|\cdot\cdot\|\hat{})$ است: ساختار فضای برداری روی $\hat{E}$ را می‌توان به‌نحوی ظریف به‌صورت خارج قسمت فضای برداری همهٔ دنباله‌های کوشی در E بر زیرفضای برداری همهٔ دنباله‌های همگرا به o، تعریف کرد. تابع نرم $\|\cdot\cdot\|: E \to \mathbb{R}$ یکنواخت ـ پیوسته است $(\varepsilon = \delta)$ و درنتیجه می‌تواند به‌طور پیوسته به $\|\cdot\cdot\|\hat{}: \hat{E} \to \mathbb{R}$، که خود نیز یک نرم است (بررسی کنید!)، توسیع داده شود، و تساوی $\hat{d}(x,y) = \|x-y\|\hat{}$ برقراراست. فضای تکمیلی یک فضای حاصلضرب داخلی حقیقی یا مختلط، به‌شیوه‌ای متعارف، یک فضای هیلبرت است.

نگاشتهای خطی پیوستهٔ $f : E \to V$ بین فضاهای برداری نرمدار، خودبه‌خود یکنواخت ـ پیوسته‌اند و توسیعهای آنها $\hat{f} : \hat{E} \to \hat{V}$، چنان‌که در بالا شرح دادیم، باز نگاشتهایی خطی هستند.

برای آنکه به هدف نزدیکتر شویم، معنی «فضاهای L^p» را یادآوری (یا تعریف) می‌کنیم: منظور از $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$، به‌ازای یک مقدار ثابت $p \geqslant 1$، فضای برداری همهٔ توابع اندازه‌پذیر لبگ[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ است که برای آن $|f|^p$ انتگرالپذیرِ لبگ باشد. دراین‌صورت، ضابطهٔ

$$\| f \|_p := \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx}$$

1. completeness 2. incompleteness 3. uniform spaces
4. Lebesgue-measurable

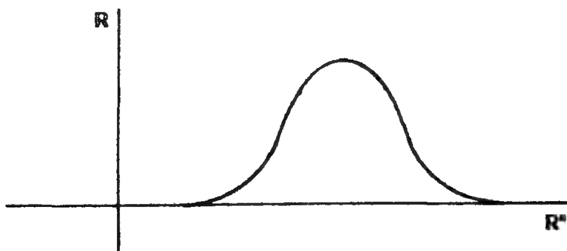
یک نیمنرم را روی فضای $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ به‌دست می‌دهد. همان‌گونه که در نظریهٔ انتگرالگیری دیده‌ایم، بستار نقطهٔ o، یعنی $\overline{\{o\}} = \{f \in \mathscr{L}^p | \parallel f \parallel_p = o\}$، دقیقاً مجموعهٔ همهٔ توابعی است که خارج ازیک مجموعهٔ صفر ـ اندازه[1] برابر صفرند. منظور از $L^p(\mathbb{R}^n)$ فضای نرمدار خارج قسمت مربوط به‌آن‌است که به‌صورت $L^p(\mathbb{R}^n) := \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)/\overline{\{o\}}$ تعریف می‌شود (به آخر فصل ۳، بخش ۴، مراجعه شود). و امّا، یکی از قضایای مهم نظریهٔ انتگرالگیری این‌است که $L^p(\mathbb{R}^n)$ یک فضای کامل، و درنتیجه یک فضای باناخ است.

به‌گونه‌ای مشابه، چنانچه $(X, \mathfrak{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر مجهز به‌یک اندازهٔ σ ـ جمعپذیر $\mu : \mathfrak{M} \to [o, \infty]$ باشد و غیره، فضای L^p یعنی $L^p(X, \mu)$ نیز تعریف می‌شود. حالت $p = ۲$ بالاخص مستلزم دقت است، زیرا $L^۲(X, \mu)$ نه‌تنها یک فضای باناخ، بلکه با ضرب داخلی

$$< f, g >= \int_X fgd\mu$$

یک فضای هیلبرت خواهد شد.

در بررسی ژرفتر، می‌بینیم که یک فضای L^p شیئی است ریاضی و نسبتاً پیچیده، و آنهایی که انتگرالهای لبگ را مطالعه نکرده‌اند، به‌گمان آنکه می‌توانند با انتگرالهای ریمان احتیاج خود را رفع‌کنند، دربرخورد بااین فضاها دچارترس بجایی می‌شوند. اما فضاهای $L^p(\mathbb{R}^n)$ عناصر بسیار بی‌آزاری را نیز دربردارند. به‌ویژه، فضای برداری $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$، متشکل از توابع بینهایت بار دیفرانسیلپذیر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با «محمل فشرده»[2] به‌طور متعارف یک زیرفضای برداری $L^p(\mathbb{R}^n)$ است. (منظور از تابع با محمل فشرده تابعی است که خارج ازیک مجموعهٔ فشرده صفر می‌شود)



روی این زیرفضا، p ـ نرمِ

$$\parallel f \parallel_p = \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx}$$

و حاصلضرب داخلی $< f, g >= \int_{\mathbb{R}^n} fgdx$، حتی با هرگونه برداشت ابتدایی از هریک از مفاهیم

1. set of measure zero
2. compact support

انتگرال، به‌سادگی قابل درک است. بنابراین، مایهٔ امیدواری است که بدانیم در نظریهٔ انتگرالگیری چگال بودن $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ در فضای $L^p(\mathbb{R}^n)$ ثابت می‌شود، و این به‌آن معنی است که $L^p(\mathbb{R}^n)$ یک فضای تکمیلی فضای

$$(C_o^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\cdot\|_p)$$

است، و ازآنجا که، باتقریب یک همریختی طولپایی‌متعارف، هرفضا فقط یک فضای تکمیلی دارد می‌توان $L^p(\mathbb{R}^n)$ را به‌عنوان فضای تکمیلی $(C_o^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\cdot\|_p)$ (و یا به‌عنوان فضای تکمیلی $(C_o^\infty(\mathbb{R}^n), <\cdot\cdot,\cdot\cdot>)$ در حالت $p = ۲$)، تعریف کرد!

قصد ندارم در ذهن خواننده این توهم را به‌وجود آورم که بااین ترفند سادهٔ تکمیل می‌توان واقعاً انتگرال لبگ را از سرراه برداشت، زیرا هرچند توانستیم فضاهای L^p را به‌صورت فضای تکمیلی فوق تعریف کنیم، اما ازاینکه تا چه‌اندازه «نقاط حدی آرمانی» جدید می‌توانند به‌عنوان تابع نگریسته شوند، هیچ‌گونه اطلاعی نداریم، و روش تحلیلی ملموس دیگری نیز برای تعبیر آنها نداریم. اما دست نگهدارید! این واقعیت که فضاهای $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ و فضاهای مشابه، همراه با نرمهایی کاملاً مناسب، در رابطه با مسألهٔ مورد نظر، می‌توانند خیلی سریع (بدون توجه به لزوم مطالعهٔ نقاط آرمانی) کامل شوند، آزادی عمل فوق‌العاده ارزشمندی پدید می‌آورد. پیش از خاتمهٔ این فصل، مثالی می‌آورم تا آنچه را که می‌خواهم بیان کنم روشن سازد.

برای نشان دادن عملگرهای دیفرانسیل جزئی[۱] ، عادت براین جاری است که از قرارداد اندیسهای چندگانه استفاده می‌کنند: اگر $\alpha = (\alpha_۱, \cdots, \alpha_n)$، $\alpha_i > o$ اعداد صحیح، و $|\alpha| := \alpha_۱ + \cdots + \alpha_n$، آنگاه نماد D^α به‌معنی $\partial^{|\alpha|}/\partial x_۱^{\alpha_۱} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$ است؛ پس، این نماد، شکل عمومی یک مشتق جزئی از هر مرتبهٔ $|\alpha|$ است. حال اگر $a_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را توابعی (به‌فرض، هموار) از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ فرض کنیم، دراین‌صورت، $p = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha D^\alpha$ یک عملگر دیفرانسیل جزئی خطی روی $\mathbb{R}^n$ است، و یک معادله به‌شکل $Pf = g$ که g تابعی است مفروض روی $\mathbb{R}^n$ و f تابعی است که باید تعیین شود، یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خطی[۲] (ناهمگن)[۳] نامیده می‌شود.

عمداً نگفتم که «عملگر» P بر چه‌چیزی «عمل می‌کند». درهرحال: P معرّف نگاشتی است خطی مانند $P : C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ به‌همان مفهومی که در جبر خطی مطرح است. اما جبر خطی به تنهایی دیگرکاری برای ما انجام نمی‌دهد؛ خیلی بهتر است که P را به‌عنوان یک عملگر خطی پیوسته، مثلاً، دریک فضای هیلبرت درنظر بگیریم، زیرا دراین‌صورت، هنگام مطالعهٔ P، می‌توانیم از نظریهٔ تابعی ـ تحلیلی[۴] این‌گونه عملگرها استفاده کنیم.

---

1. partial differential operators
2. linear partial differential equation
3. non-homogeneous
4. function-analytical theory

البته ممکن است $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ را چنان تکمیل کنیم که فضای هیلبرت $L^p(\mathbb{R}^n)$ به‌دست آید، اما بدبختانه هیچ راهی برای آنکه P بتواند روی آن عمل کند موجود نیست، زیرا $P : C_o^\infty \to C_o^\infty$ خود برای نرم $\|\cdot\cdot\|_2$ پیوسته نیست، و به طریق اولی نمی‌تواند توسیع پیوسته‌ای به‌شکل $\hat{P} : L^2 \to L^2$ داشته باشد. و اما راههای متفاوت دیگری برای تعریف حاصلضرب داخلی روی C_o^∞ وجود دارند که باید باتوجه به هدف نهایی انتخاب شوند (که مسلماً گفتن آن ساده‌تر از انجام دادن آن‌است). شاید بدیهیترین آنها، ضربهای داخلی روی $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ با دستور زیر برای هرعدد صحیح $r \geqslant o$ باشند:

$$< f, g >_r := \sum_{|\alpha| \leqslant r} \int_{\mathbb{R}^n} < D^\alpha f, D^\alpha g > dx$$

فضاهای هیلبرت $H^r(\mathbb{R}^n)$، که از تکمیل $(C_o^\infty(\mathbb{R}^n), < \cdot\cdot, \cdot\cdot >_r)$ به‌دست می‌آیند، ساده‌ترین مثالهای اشیایی هستند که «فضاهای سوبولف» [1] نامیده می‌شوند و به‌عنوان ابزار بس پالوده‌ای در نظریهٔ عملگرهای دیفرانسیل جزئی به‌کار می‌روند. بدون اشکال دیده می‌شود که با شرایط مناسبی روی ضرایب، عملگر $P = \sum_{|\alpha| \langle k} a_\alpha D^\alpha$ معرف یک عملگر خطی

$$P^r : H^r(\mathbb{R}^n) \to H^{r-k}(\mathbb{R}^n)$$

است که درواقع پیوسته است.

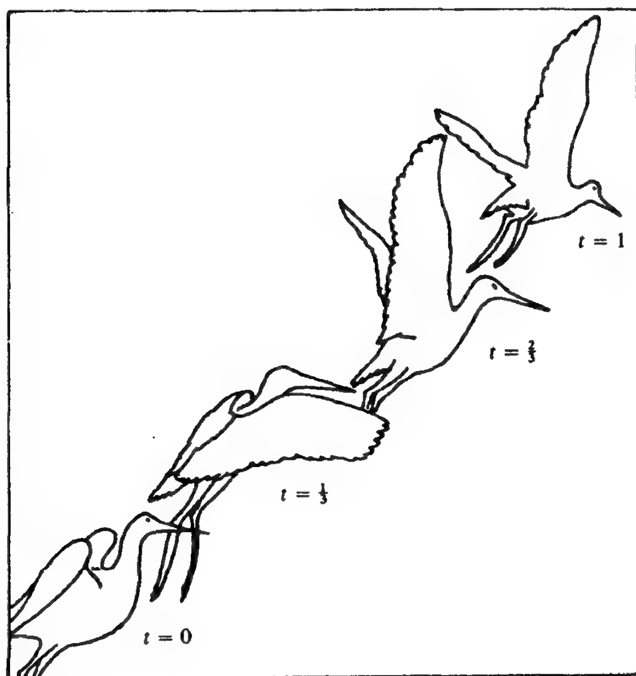
این مثال نشان می‌دهد که توپولوژی نقطه ـ مجموعه چه نوع کاربردی در آنالیز دارد. بدیهی است که فقط با واردکردن فضاهای سوبولف، بررسی عملگرهای دیفرانسیل جزئی به‌حدکمال خود نمی‌رسد و توپولوژی نمی‌تواند مسائل تحلیلی را با شایستگی حل کند، اما محیطی قابل پیشرفت برای آنالیز فراهم می‌سازد.

---

1. Sobolev spaces

۵

مانسته‌جایی (هوموتوپی)



۱. نگاشتهای مانسته‌جا (هوموتوپ)

در بخشهای ۱ تا ۳، مفاهیم پایهٔ «نگاشتهای مانسته‌جا»، «مانسته‌جایی» و «هم‌ارزی مانسته‌جایی»

را تعریف و به‌شکل شهودی تشریح می‌کنیم و در بخشهای ۴ تا ۷، کاربردهای این مفاهیم را مورد بحث قرار می‌دهیم.

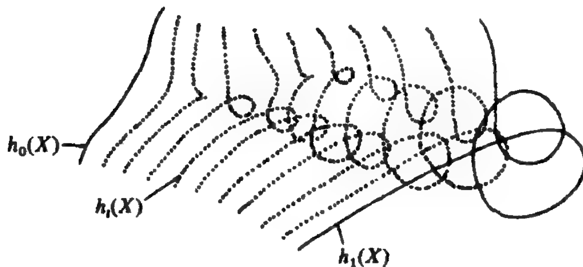
تعریف (مانسته‌جایی، مانسته‌جا). دو نگاشت پیوستهٔ $f, g : X \to Y$ بین فضای توپولوژیک را مانسته‌جا[1] نامند، و با نماد $f \simeq g$ نمایش می‌دهند، هرگاه بین آنها یک مانسته‌جایی[2] h موجود باشد، یعنی یک نگاشت پیوستهٔ $h : X \times [o, ۱] \to Y$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر $x \in X$، $h(x, o) = f(x)$ و $h(x, ۱) = g(x)$.

نمادگذاری. همچنین در این حالت می‌نویسیم $f \underset{h_o}{\simeq} g$. منظور از نماد $h_t : X \to Y$، به‌ازای مقادیر ثابت t، نگاشت پیوسته‌ای است که با ضابطهٔ

$$h_t(x) := h(x, t)$$

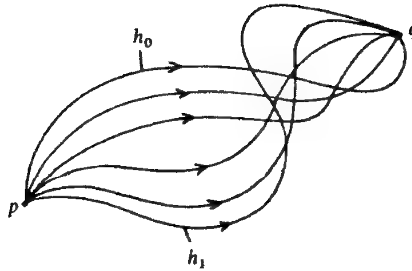
تعریف می‌شود. پس، با این نمادگذاری داریم $h_o = f$ و $h_۱ = g$.

مانسته‌جاییها را هم می‌توان مانند نگاشتها تا حدودی از راه ترسیمی مجسم کرد: بازهٔ $[o, ۱]$ را به‌عنوان یک بازهٔ زمانی در نظر می‌گیریم؛ در لحظهٔ $t = o$، نگاشت h_t به‌شکل f است، اما به‌تدریج در طول زمان تغییر پیدا می‌کند تا اینکه در لحظهٔ $t = ۱$ به‌شکل g درمی‌آید. کلیهٔ این تغییرات باید به‌طور پیوسته نسبت به هر دو متغیر صورت گیرد، و بنابراین می‌توان گفت که مانسته‌جایی h به‌معنی یک دگردیسی یا «تغییر شکل[3] پیوستهٔ f به g است».



غالباً، علاوه بر پیوستگی، شرایط اضافی دیگری نیز برای مانسته‌جاییها قائل می‌شوند: مثلاً، در نظریهٔ توابع، مفهوم مانسته‌جایی را برای راههایی با ابتدا و انتهای ثابت در نظر می‌گیرند، که $X = [o, ۱]$ و $Y \subset \mathbb{C}$ مجموعه‌ای باز و $p, q \in Y$ نقاطی ثابت‌اند. شرایط اضافی حاکم بر مانسته‌جایی در این حالت آن است که: برای هر t، $h_t(o) = p, h_t(۱) = q$.

1. homotopic 2. homotopy 3. deformation

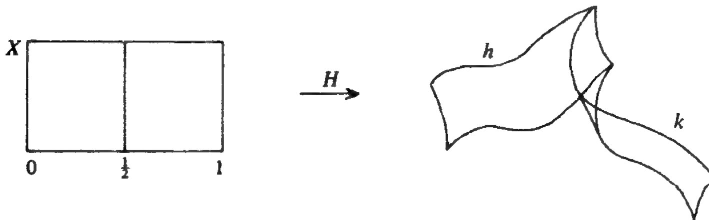


در توپولوژی دیفرانسیل، غالباً مانسته‌جاییهای بین نگاشتهایی از یک خمینه به خمینهٔ دیگر را در نظر می‌گیرند با این شرط که هر h_t یا نشاندن[1] (یعنی h یک جاپایی یا «ایزوتوپی»[2]) یا هموارریختی[3] (یعنی h یک هموارجایی یا «دیفئوتوپی»[4]) باشد. پس، موقعیتهای متعددی پیش می‌آید که در آنها، علاوه بر آنکه h یک مانسته‌جایی است، باید در فلان یا بهمان شرط اضافی نیز صدق کند. اما در اینجا می‌خواهیم فقط به بحث در مورد مفهوم پایه بپردازیم، که در آن h باید فقط پیوسته باشد.

همان‌گونه که از نماد $\simeq$ برمی‌آید، «مانسته‌جایی» یک رابطهٔ هم‌ارزی است. ویژگی بازتابی بدیهی است، زیرا با قرار دادن $h_t := f$ برای هر t، یک مانسته‌جایی بین f و f تعریف می‌شود، پس $f \simeq f$. برای اثبات تقارن، چنانچه $f \simeq g$ و مانسته‌جایی بین آنها h_t باشد، که $o \leqslant t \leqslant ۱$، در آن صورت، به‌کمک $h_{۱-t}$ دیده می‌شود که $g \simeq f$. برای اثبات ترایایی، فرض کنیم که $f \underset{h}{\simeq} g \underset{k}{\simeq} l$، در این‌صورت داریم $f \underset{H}{\simeq} \ell$، که در آن:

$$H_t = \begin{cases} h_{۲t} & \text{بنابراین} \quad o \leqslant t \leqslant \frac{۱}{۲} \\ k_{۲t-۱} & \text{بنابراین} \quad \frac{۱}{۲} \leqslant t \leqslant ۱ \end{cases}$$

(پیوستگی H را ثابت کنید!)



نمادگذاری. اگر X و Y فضاهای توپولوژیک باشند، منظور از $[X, Y]$ مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزیِ

1. embedding
2. isotopy
۳. هموارریختی (برای کوتاهی بیان) به‌جای همسانریختی هموار که برابر نهادهٔ diffeomorphism=smooth homemorphism است به‌کار برده شده است.
4. diffeotopy

(«رده‌های مانسته‌جایی»[1]) نگاشتهای پیوسته از X به Y است.

هرگاه لازم آید مفاهیمی را پشت سر هم تعریف کنیم، می‌توانیم در تعریف مفهوم $(n+1)$ام، ارتباط آن را با n مفهوم قبلی به‌وسیلهٔ nلم مشخص کنیم. مثلاً:

نکته (ترکیب نگاشتهای مانسته‌جا). به‌ازای دو زوج از نگاشتهای مانسته‌جا به‌شکل $X \underset{f\simeq g}{\longrightarrow} Y \underset{\bar{f}\simeq\bar{g}}{\longrightarrow} Z$، نگاشتهای مرکب $\bar{f}\circ f$ و $\bar{g}\circ g$ نیز مانسته‌جا هستند (از طریق $\bar{h}_t \circ h_t$ و غیره استفاده شود).

نکته (حاصلضرب نگاشتهای مانسته‌جا). برای دو زوج از نگاشتهای مانسته‌جا به‌شکل $f_i \simeq g_i : X_i \to Y_i$، $i = ۱, ۲$، نگاشتهای $f_۱ \times f_۲$ و $g_۱ \times g_۲$ از $X_۱ \times X_۲$ به $Y_۱ \times Y_۲$ نیز مانسته‌جا هستند (از طریق $h_t^{(۱)} \times h_t^{(۲)}$ و غیره استفاده شود).

اما برای مفاهیم ساده‌ای همچون مانسته‌جایی، آوردن فهرست کاملی از قضایا فعلاً ملال‌آور و زاید است، در نتیجه، ترجیح می‌دهیم که صبر کنیم و ببینیم در عمل به چه چیزهایی نیاز خواهیم داشت.

۲. هم‌ارزی مانسته‌جایی

تعریف (هم‌ارزی مانسته‌جایی). یک نگاشت پیوسته $f : X \to Y$ را هم‌ارزی مانسته‌جایی[2] بین X و Y نامند هرگاه یک «وارون مانسته‌جایی»[3] داشته باشد، به‌این معنی که نگاشت پیوسته‌ای چون $g : Y \to X$ با شرایط $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ و $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ موجود باشد.

درچنین حالتی، می‌گوییم که f و g هم‌ارزیهای مانسته‌جایی وارون یکدیگرند، و فضاهای X و Y را هم‌ارز مانسته‌جایی[4] می‌نامند. واضح است که حاصل ترکیب هم‌ارزیهای مانسته‌جایی نیز، هم‌ارزیهای مانسته‌جایی هستند، و به‌ازای هر فضای X، نگاشت همانی Id_X یک هم‌ارزی مانسته‌جایی است: پس، درواقع یک رابطهٔ هم‌ارزی داریم: همواره $X \simeq X$، و از $X \simeq Y \simeq Z$ نتیجه می‌شود که (به‌هر حال) $X \simeq Y$ و $X \simeq Z$.

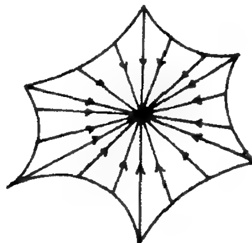
به یک حالت ساده اما مهم توجه کنیم:

تعریف (فضای انقباض‌پذیر). یک فضای توپولوژیک را انقباض‌پذیر[5] گویند هرگاه با یک فضای

1. homotopy classes 2. homotopy equivalence 3. homotopy inverse
4. homotopy equivalent 5. contractible

یک نقطه‌ای هم‌ارز[۱] باشد.

در این حالت، تعریف ما به‌این شرط بدل می‌شود که یک مانسته‌جایی $h : X \times [o, ۱] \rightarrow X$، به‌نام «انقباض»[2] بین نگاشت همانی و یک نگاشت ثابت $X \rightarrow \{x_o\} \subset X$ موجود است. مثلاً، فضای $\mathbb{R}^n$ انقباض‌پذیر است، زیرا $h_t(x) := (۱ - t)x$ معرّف یک انقباض فضا به مبدأ است. همچنین، هر زیر فضای ستاره‌ای شکل[3] $\mathbb{R}^n$ نیز انقباض‌پذیر است.



تعریف (درون‌بر و تغییر شکل درون‌بر). فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset X$ یک زیر فضای آن. A را یک درون‌بر[4] X می‌نامیم هرگاه یک درون‌بری[5] $\rho : X \rightarrow A$، یعنی یک نگاشت پیوستهٔ ρ که در شرط $\rho|A = \mathrm{Id}_A$ صدق می‌کند، موجود باشد. حال، اگر ρ به‌عنوان یک‌نگاشت از X به X، با نگاشت همانی مانسته‌جا باشد، آنگاه ρ رایک درون‌بری تغییر شکل[6] نامند، و متناظر با آن، خود A را یک درون‌بر تغییر شکل[7] گویند. سرانجام، چنانچه مانسته‌جایی بین ρ و Id_X را بتوان به‌گونه‌ای انتخاب کرد که همهٔ نقاط A در جریان این درون‌بری ثابت بمانند، یعنی برای هر $t \in [o, ۱]$ و هر $a \in A$، تساوی $h_t(a) = a$ برقرار باشه‌در این‌صورت ρ را یک درون‌بر تغییر شکل قوی[8] می‌نامند و A را یک درون‌بر تغییر شکل قویِ X گویند.

بدیهی است که یک درون‌بری تغییر شکل $\rho : X \rightarrow A$ و نگاشت احتوای نظیر آن $i_A : A \subset X$، هم‌ارزیهای مانسته‌جاییِ وارون یکدیگرند. زیرا در مفهوم «درون‌بر» نهفته است که $\rho \circ i_A = \mathrm{Id}_A$ و از مفهوم «تغییر شکل» نتیجه می‌شود که $i_A \circ \rho \simeq \mathrm{Id}_A$.

کلیهٔ آنچه در مورد درون‌بری گفته شد، در برخورد اول خشک و بی‌روح به‌نظر می‌رسد، اما اکنون می‌خواهم چیزی بگویم که اشتیاق شما را به درون‌برهای تغییر شکل قوی برانگیزد. هنگامی‌که در عمل با مانسته‌جاییها سروکار داریم، وسعت دید برای تشخیص هم‌ارزی مانسته‌جایی فضاها از اهمیت

---

۱. منظور هم‌ارز مانسته‌جایی است. ـ م.

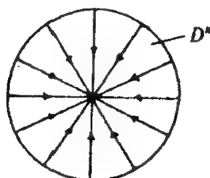
2. contraction 3. star shaped 4. retract 5. retraction
6. deformation retraction 7. deformation retract
8. strong deformation retract

ویژه‌ای برخوردار است. تا آنجاکه ممکن است، تلاش می‌کنیم از جستجوی پرزحمت نگاشتهایی چون $f : X \to Y$ و $g : X \to Y$ و یک مانسته‌جایی $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ و یک مانسته‌جایی دیگر $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$، و نوشتن جزئیات مربوط به آنها خودداری کنیم. برعکس، مایلیم به‌آن درجه از وسعت دید برسیم که، بدون توجه به جزئیات، با یک نگاه بتوانیم بگوییم: این دو فضا هم‌ارز مانسته‌جایی هستند، و همه هم قبول کنند و بگویند: بدیهی است که هم‌ارز مانسته‌جایی هستند.

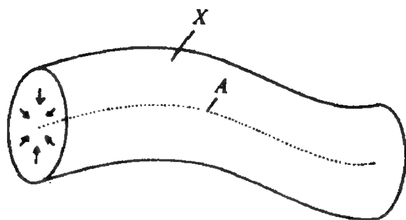
اما این تشخیص سریع فضاهای هم‌ارز مانسته‌جایی، در بسیاری از موارد، عملاً بر ساختن یک هم‌ارزی مانسته‌جایی $X \simeq Y$، به‌صورت ترکیبی متناهی از هم‌ارزیهای مانسته‌جایی مانند $X \simeq X_۱ \simeq \cdots \simeq X_r \simeq Y$ مبتنی است، به‌گونه‌ای که در هر مرحله (که تعداد مراحل معمولاً اندک وگاهی منحصر به یک یا دو مرحله است)، دو فضای مورد بحث یا همسانریخت هستند، یا یکی از دو فضا یک درون‌بر تغییر شکل قوی دیگری است. در هر حال، ببینیم سادگی تشخیص درون‌برهای تغییر شکل قوی در چیست؟ در جواب، ببینیم یک چنین تغییر شکل چه‌کار می‌کند: هر نقطهٔ X را در طول یک راه پیوسته، در فاصلهٔ زمانی بین o و ۱، به‌فضای A می‌برد، و آنچه لازم است به‌ذهن خود بسپاریم این‌است که اگر نقاطی در A آغاز شوند، تغییر مکان نمی‌دهند. پس اگر بتوان X و A را اصلاً به‌صورت نموداری مجسم کرد، تغییر شکل h، در صورت وجود، احتمالاً به‌سادگی پیدا می‌شود. اکنون برای کمک به دقّت دید خود به‌ذکر چند مثال می‌پردازیم.

۳. مثالها

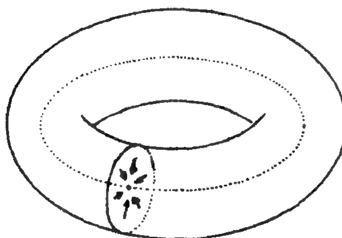
مثال ۱. بدیهی است که مبدأ درون‌برِ تغییر شکل قویِ $\mathbb{R}^n$ یا گوی D^n است.



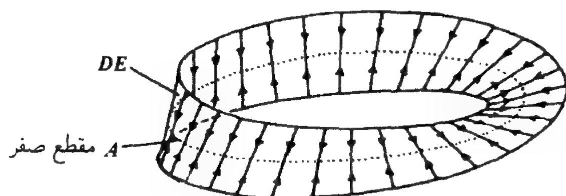
از اینجا چنین برمی‌آید که اگر A یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد، $A \times o$ یک درون‌بر تغییر شکل قویِ فضای $A \times \mathbb{R}^n$ یا $A \times D^n$ است.



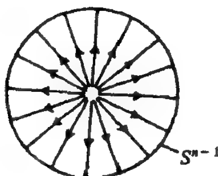
به‌ویژه، مثلاً، چنبرهٔ توپر[1] $S^{۱} \times D^{۲}$ هم‌ارز مانسته‌جایی با دایرهٔ $S^{۱}$ است:



کلیتر بگوییم، اگر E یک کلاف برداری بر یک فضای توپولوژیک A باشد، مقطع صفر،[2] یک درون‌بر تغییر شکل قوی E است، همچنین اگر E مجهز به یک متر یک ریمانی باشد، آنگاه مقطع صفر یک درون‌بر تغییر شکل قویِ کلاف قرص DE است، یعنی $A \simeq E \simeq DE$.

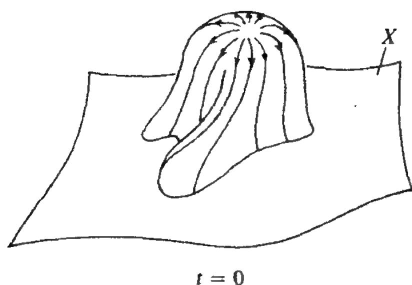


مثال ۲. کرهٔ $S^{n-۱} = \{x \in \mathbb{R}^n | \ ||x|| = ۱\}$ یک درون‌بر تغییر شکل‌قویِ گوی منهای یک نقطهٔ $D^n \backslash o$ است:

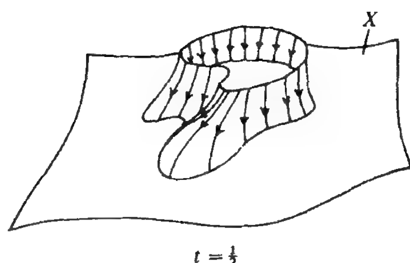


اگر حجره‌ای را به یک فضای X بچسبانیم و مرکز را از حجره برداریم، یک فضای $X \cup_\varphi (D^n \backslash o)$ به‌دست می‌آوریم که با X هم‌ارز مانسته‌جایی است، زیرا $X \subset X \cup_\varphi (D^n \backslash o)$ یک درون‌بر تغییر شکل قوی است:

1. solid torus
2. zero section



$t = 0$

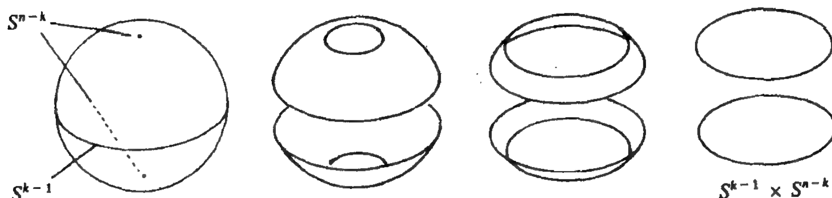


$t = \frac{1}{2}$

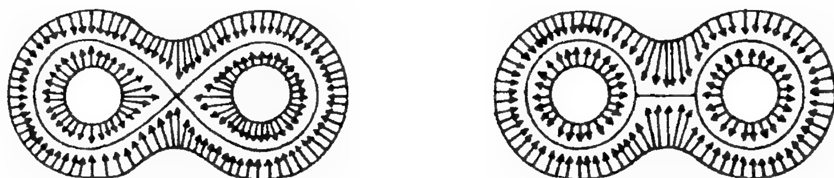
مثال ۳. فرض کنیم $o < k < n$. به‌فضای $\mathbb{R}^{n+۱}$، به‌صورت $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k+۱}$ می‌نگریم، و در فضای $S^n \subset \mathbb{R}^{n+۱}$، زیر فضای

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}(S^{k-۱} \times S^{n-k}) = \{(x,y)|\ \ ||x||^{۲} = ||y||^{۲} = \frac{۱}{۲}\}$$

را، که به‌شکل «حاصلضرب کره‌ها» ست، در نظر می‌گیریم. در این صورت، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(S^{k-۱} \times S^{n-k})$ یک درون‌بر تغییر شکل قویِ $S^n\backslash(S^{k-۱} \times o \cup o \times S^{n-k})$ است.



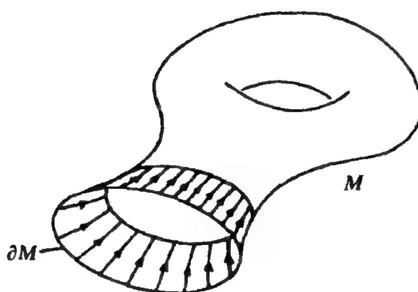
مثال ۴. یک شکل «هشت لاتین» و شکلی متشکل از دو دایرهٔ متخارج که به‌وسیلهٔ پاره‌خطی به‌هم وصل شده باشند، هم‌ارز مانسته‌جایی‌اند، زیرا هر دوی آنها درون‌بر تغییر شکل قوی برای فضایی هستند که به‌شکل «هشت لاتین ضخیم» است.



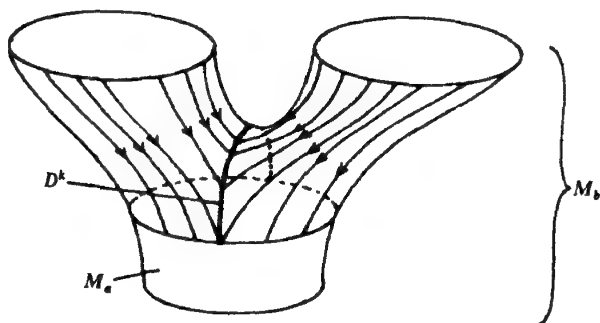
مثال ۵. فرض کنیم M یک خمینهٔ دیفرانسیلپذیر مرزدار[1] باشد. اگر مرز آن، ∂M، ناتهی باشد، واضح است که $M\backslash\partial M$ نمی‌تواند یک درون‌برِ M باشد، زیرا در M چگال است. اما، با استفاده از یک «همسایگی گردنبندی»[2] می‌توان دید که M و $M\backslash\partial M$ هر دو دارای یک درون‌بر تغییر شکل

1. differentiable manifold with boundary
2. collar neighborhood

مشترک‌اند. بنابراین، هم‌ارز مانسته‌جایی هستند.



مثال ۶. باز یک مثال دیگر از توپولوژی دیفرانسیل، بالاخص از نظریهٔ مورس[1]، می‌آوریم. با نمادگذاری فصل ۳، بخش ۷ مثال ۲، فضای $M_a \cup_\varphi D^k$ یک درون‌بر تغییر شکل قویِ فضای M_b است، با همان نمادگذاری فصل ۳، بخش ۷، مثال ۲ (مراجعه شود به [۱۴]).



مثال ۷.



برای هر فضای توپولوژیک X، مخروط CX انقباض‌پذیر است: راس مخروط یک درون‌بر تغییر شکل قویِ مخروط است.

۴. رسته‌ها

برای آنکه بتوانیم حقیقت و غایت مفهوم مانسته‌جایی را بیان کنیم، باید نخست بگوییم منظور از «توپولوژی

1. Morse theory

جبری»[1] چیست. بهترین راه برای این کار آن‌است که از زبان مناسب آن، که کاربردهای فراوانی در ریاضیات دارد، بهره گیریم. این زبان، زبان رسته‌ها و تابعگونهاست.

تعریف (رسته‌ها). یک رستهٔ $\mathscr{C}$[2] از داده‌های زیر تشکیل شده است:

(الف) یک ردهٔ $\mathrm{Ob}\,(\mathscr{C})$ از اشیاء ریاضی، به‌نام اشیاء رسته[3].

(ب) یک مجموعهٔ $\mathrm{Mor}(X,Y)$ به‌ازای هر دو شیء (X,Y)، به‌گونه‌ای که اگر زوجهای (X,Y) و (X',Y') متمایز باشند، مجموعه‌های $\mathrm{Mor}(X,Y)$ و $\mathrm{Mor}(X',Y')$ جدا از هم باشند. اعضای مجموعهٔ $\mathrm{Mor}(X,Y)$ ریختیهای[4] X به Y نامیده می‌شوند. نمادگذاری: به‌جای $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ از نماد $f : X \to Y$ نیز استفاده می‌کنیم، بدون آنکه الزاماً X و Y مجموعه باشند و f یک نگاشت باشد.

(پ) یک قانون ترکیب $\mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z)$ به‌ازای هر سه‌گانه (X,Y,Z) از اشیاء (این قانون ترکیب را به‌شکل $(f,g) \mapsto g \circ f$ می‌نویسیم، که با نمادگذاری $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ که از مجموعه‌ها و نگاشتها گرفته‌ایم، متناظر است).

داده‌های (الف)، (ب) و (پ) تشکیل یک رسته می‌دهند مشروط بر آنکه در اصول موضوع زیر صدق کنند:

اصل موضوع ۱ (شرکتپذیری). اگر f و g و h ریختیهایی به‌شکل $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} U$ باشند، آنگاه $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

اصل موضوع ۲ (همانی). به‌ازای هر شیء X عضوی از $\mathrm{Mor}(X,X)$ با نماد 1_X، موجود است که ویژگی زیر را دارد: برای هر ریختی $f : Y \to X$، و هر ریختی $g : X \to Z$ برابریهای $1_X \circ f = f$ و $g \circ 1_X = g$ برقرارند.

پیش از آنکه به مفاهیم دیگری بپردازیم، فهرستی از مثالهای رسته‌ها می‌آورم. مادامی که ریختیها نگاشت هستند و دربارهٔ قانون ترکیب آنها هیچ‌گونه توضیح اضافی نمی‌آید، همواره به‌خاطر خواهیم سپرد که منظور از ترکیب، همان ترکیب معمولی نگاشتهاست.

مثال ۱. رستهٔ مجموعه‌ها، $\mathscr{M}$:

(الف) اشیاء: مجموعه‌ها؛

(ب) ریختیها: نگاشتها.

مثال ۲. رستهٔ توپولوژیک، $\mathscr{T}\!\mathit{o}\mathscr{P}$:

---

1. algebraic topology 2. category 3. objects of the category
4. morphisms

(الف) اشیاء: فضاهای توپولوژیک؛

(ب) ریختیها: نگاشتهای پیوسته.

ضمناً، مثال زیر نیز، هر چند چندان جالب نیست، ولی به هر حال یک رسته است:

مثال ۲′.

(الف) فضاهای توپولوژیک؛

(ب) نگاشتهای دلخواه بین فضاهای توپولوژیک،

مثال ۳. رستهٔ گروهها:[۱]

(الف) گروهها؛

(ب) همریختیهای بین گروهها.

مثال ۴. رستهٔ فضاهای برداری روی هیأت $\mathbb{K}$:[۲]

(الف) فضاهای برداری روی هیأت $\mathbb{K}$؛

(ب) نگاشتهای $\mathbb{K}$ ـ خطّی.

مثال ۵. رستهٔ فضاهای برداری توپولوژیک روی $\mathbb{K}$:[۳]

(الف) فضاهای برداری توپولوژیک روی $\mathbb{K}$؛

(ب) نگاشتهای خطی پیوسته.

مثال ۶. رستهٔ توپولوژیک دیفرانسیل $\mathscr{Diff\,top}$ [۴] :

(الف) خمینه‌های دیفرانسیلپذیر؛

(ب) نگاشتهای دیفرانسیلپذیر.

مثال ۷. رستهٔ $\mathscr{Vect}(X)$ متشکل ازکلافهای برداری بر یک فضای توپولوژیک مفروض X:

(الف) کلافهای برداری بر X؛

(ب) همریختیهای کلافی[۵]، یعنی نگاشتهای پیوسته و تار به تار خطی[۶] بر نگاشت همانی در X:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\pi'} & \\ & X & \end{array}$$

مثال ۸. رستهٔ کلافهای برداری n بعدی بر فضاهای توپولوژیک دلخواه:

(الف) کلافهای برداری n بعدی؛

1. category of groups
2. category of vector spaces over $\mathbb{K}$
3. category of topological vector spaces over $\mathbb{K}$
4. differential topological category
5. bundle homomorphisms
6. fiberwise linears

(ب) «نگاشتهای کلافی»، یعنی نگاشتهای پیوسته و تار به تار یکریخت در نگاشتهای پیوسته از یک فضای پایه به فضای پایهٔ دیگر:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

از این مثالها می‌توانیم خیلی زیاد بیاوریم، زیرا عملاً هر یک از انواع ساختارهای ریاضی، دارای نگاشتهای حافظ ساختار یا سازگار با ساختار است، و اصول موضوع رسته‌ها نیز نیاز فراوانی به چیزهای دیگر ندارند. دهها مثال در جبر، آنالیز، توپولوژی و در مباحث دیگر وجود دارند.

مثالهای فوق یک وجه مشترک دارند و آن اینکه اشیاء آنها مجموعه‌هایی هستند با ساختار اضافی و ریختیهایشان نگاشتهایی هستند با ترکیب معمولی نگاشتها (به‌همین دلیل، نگران شرکتپذیری آنها نیستیم). اما مفهوم رسته، فراتر از این‌است. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را، که شاید اندکی عجیب به‌نظر آید، می‌آوریم:

مثال ۹. فرض کنید G یک گروه باشد.

(الف) فقط یک شیء که آن‌را e می‌نامیم؛

(ب) $\mathrm{Mor}(e,e) := G$؛

(پ) ترکیب، عمل ضرب گروه G است.

یک مثال واقعاً مهم از رسته‌هایی که ریختیهای آن نگاشت نیستند مثال زیر است:

مثال ۱۰. رستهٔ مانسته‌جایی، $\mathcal{H}top$

(الف) اشیاء، همانند رستهٔ $\mathcal{T}op$.، فضاهای توپولوژیک‌اند، اما:

(ب) ریختیها رده‌های مانسته‌جایی نگاشتهای پیوسته‌اند، یعنی

$$\mathrm{Mor}(X,Y) := [X,Y];$$

و

(پ) ترکیب رده‌ها به‌کمک نماینده‌ای از هر رده تعریف می‌شود:

$$[g]\circ[f] = [g\circ f]$$

*

پس از آوردن تعریف و مثالها، به دو سه تذکر تکمیلی می‌پردازیم. از اصل موضوع همانی بی‌درنگ نتیجه می‌شود که برای هر شیء X، دقیقاً یک «همانی»[1] یا «واحد»[2] 1_X وجود دارد. زیرا اگر $1'_X \in \mathrm{Mor}(X, X)$ نیز همان ویژگی را داشته باشد، آنگاه $1_X = 1'_X \circ 1_X = 1'_X$. به‌همین ترتیب، هر ریختی $f : X \to Y$، حداکثر یک ریختی وارون $g : Y \to X$ (یعنی با ویژگیهای $f \circ g = 1_Y$ و $g \circ f = 1_X$) دارد. زیرا، اگر g' نیز همین ویژگیها را داشته باشد، آنگاه $g' \circ (f \circ g) = g' \circ 1_Y$ و در نتیجه، بنابر اصل شرکتپذیری، $(g' \circ f) \circ g = 1_X \circ g = g = g' \circ 1_Y = g'$.

ریختیهایی که دارای وارون هستند یکریختیهای[3] آن رسته نامیده می‌شوند. دو شیئی که بین آنها یک یکریختی وجود داشته باشد، یکریخت نامیده می‌شوند. پس، در رستهٔ توپولوژی، دو فضا یکریخت‌اند اگر همسانریخت باشند، اما در رستهٔ مانسته‌جایی، یکریختی فقط به معنای آن‌است که فضاها هم‌ارز مانسته‌جایی هستند.

پیش از خاتمهٔ این بخش، آخرین تذکر دربارهٔ واژه‌ای است که در تعریف به‌کار بردیم و ممکن است قبلاً شما را به‌طور موقّت سردرگم کرده باشد. منظورم واژهٔ «ردهٔ»[4] اشیاء است که به‌صورت $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ آورده شده است. دلایل محکمی دردست داریم که فقط از «ردهٔ اشیاء» صحبت کنیم و نه از «مجموعهٔ اشیاء $\mathscr{C}$». شما از قبل می‌دانستید که برداشت حسی نظریهٔ مجموعه‌ها، با جملاتی نظیر «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها»، به چه نوع تناقضاتی ممکن است بینجامد. درست است که در مورد یک رستهٔ مفروض $\mathscr{C}$، می‌خواهیم مفهوم هر شییء با دقت کافی تعریف شود (همان‌طوری که مثلاً در تعریف فضاهای توپولوژیک صورت گرفت). اما انتظار نداریم بتوانیم کلیهٔ اشیاء $\mathscr{C}$ را، که قبلاً بوده‌اند، هستند، یا خواهند بود، در یک مجموعهٔ خوشتعریف بگنجانیم و بخواهیم از اعمال معمولی نظریهٔ مجموعه‌ها پیروی کنند. البته رسته‌هایی وجود دارند که اشیاء آنها واقعاً تشکیل یک مجموعه می‌دهند، چنین رسته‌هایی را اصطلاحاً «رسته‌های کوچک»[5] می‌نامیم.

درک صوری و دقیق معنای واژه‌های «مجموعه» و «رده»، مستلزم استفاده از نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌هاست. در اینجا، به تذکّر این نکته اکتفا می‌کنیم که از رده‌های اشیاء، جز مفهوم اشیاء مورد بحث نباید برداشت دیگری داشته باشید.

۵. تابعگونها

تعریف (تابعگون هموردا). فرض کنیم $\mathscr{C}$ و $\mathscr{D}$ دو رسته باشند. منظور از یک تابعگون هموردا[6] ی $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ یک تناظر («داده‌های تابعگونی»[7]) است که به هر شیء X از رستهٔ $\mathscr{C}$ یک شیء

1. identity 2. one 3. isomorphisms 4. class 5. small categories
6. covariant functor 7. functor data

$\mathscr{F}(X)$ از رستهٔ $\mathscr{D}$ و به هر ریختی $X \xrightarrow{\varphi} Y$ از رستهٔ $\mathscr{C}$ یک ریختی

$$\mathscr{F}(X) \xrightarrow{\mathscr{F}(\varphi)} \mathscr{F}(Y)$$

از رستهٔ $\mathscr{D}$ را وابسته می‌کند، و این داده‌ها در «اصول موضوع تابعگونی» زیر صدق می‌کنند: $\mathscr{F}$ ساختار رسته‌ها را حفظ می‌کند، یعنی:

(۱) $\mathscr{F}(1_X) = 1_{\mathscr{F}(X)}$

(۲) همواره $\mathscr{F}(\varphi \circ \psi) = \mathscr{F}(\varphi) \circ \mathscr{F}(\psi)$. (دلیل آن روشن است).

تعریف (تابعگون پادوردا)[1]. شبیه تابعگون هموردا است، با این تفاوت که در اینجا $\mathscr{F}$ جهت ریختیها را معکوس می‌کند: به هر ریختی $X \xrightarrow{\varphi} Y$، ریختی

$$\mathscr{F}(X) \xleftarrow{\mathscr{F}(\varphi)} \mathscr{F}(Y)$$

وابسته می‌شود، (که عبارت فوق به‌جای $\mathscr{F}(\varphi) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{F}(Y), \mathscr{F}(X))$ نوشته شده است). اصل موضوع همانی با اصل موضوع همانی تابعگونهای هموردا فرقی ندارد، اما اصل موضوع ترکیب باید به‌شکل

$$\mathscr{F}(\varphi \circ \psi) = \mathscr{F}(\psi) \circ \mathscr{F}(\varphi)$$

نوشته شود، زیرا

$$X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\varphi} Z$$

به

$$\mathscr{F}(X) \xleftarrow{\mathscr{F}(\psi)} \mathscr{F}(Y) \xleftarrow{\mathscr{F}(\varphi)} \mathscr{F}(Z)$$

تبدیل شده است.

تذکر. باید دانست که اختلاف بین تابعگونهای هموردا و تابعگونهای پادوردا فقط جنبهٔ صوری دارد، زیرا هر رسته دارای یک «رستهٔ دوگان»[2] است که اشیاء آن همان اشیاء رستهٔ مفروض است و توسط برابریهای

1. contravariant functor
2. dual category

$$\mathrm{Mor}^{\mathrm{dual}}(X,Y) := \mathrm{Mor}(Y,X)$$

و

$$\varphi \circ^{\mathrm{dual}} \psi := \psi \circ \varphi$$

تعریف می‌شود. حال، با این نمادگذاری، یک تابعگون پادوردا از $\mathscr{C}$ به $\mathscr{D}$، چیزی جز یک تابعگون هموردا از $\mathscr{C}$ به $\mathscr{D}^{\mathrm{dual}}$ نیست. اما، با توجه به مثالهای مربوطه، عملیتر و طبیعیتر این‌است که از تابعگونهای پادوردا صحبت کنیم و پای رسته‌های دوگان را به‌میان نکشیم.

به‌عنوان مثالهایی بیمایه، تابعگونهای همانی $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ راکه هموردا بودن آن روشن است و تابعگونهای ثابت $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ راکه به هر شیء یک شیء ثابت Y_o و به هر ریختی، ریختی همانی 1_{Y_o} را وابسته می‌کند در نظر می‌گیریم. تابعگونهای ثابت را می‌توانیم هموردا یا پادوردا تلقی کنیم.

هر چند این تناظرها چندن جالب نیستند، اما گاهی اوقات شایسته نیست که آنها را تابعگون ننامیم. تا حدی جالبتر از این دو نوع، «تابعگونهای نادیده‌گیر»[1] هستند. یک مثال آن، تابعگون هموردای $\mathscr{T}\!op \to \mathscr{M}$ است، که به هرفضای توپولوژیک X مجموعهٔ X، وبه هرنگاشت پیوستهٔ $f : X \to Y$، نگاشت $f : X \to Y$ را وابسته می‌کند. غالباً به دلایلی، چنین تابعگونهایی از یک رستهٔ با ساختار بیشتر به یک رستهٔ با ساختار کمتر را در نظر می‌گیریم، و تنها کار این تابعگونها، «نادیده گرفتن» ساختار غنیتر رستهٔ حوزه است.

نخستین مثالهای تابعگونها را، که محتوای ریاضی واقعی دارند، باید در جبر خطی جستجوکرد. مثلاً، فرض‌کنیم $\mathbb{K}$ یک هیأت و $\mathscr{V}$ رستهٔ فضاهای برداری روی $\mathbb{K}$ و نگاشتهای خطی باشد. در این‌صورت، مفهوم «فضای دوگان»[2] یک فضای برداری به‌طریق متعارف، یک تابعگون پادوردا به‌شکل $* : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ به‌ما می‌دهد: به هر شیء V، فضای دوگان V^* وابسته می‌شود، که بنابر تعریف،

$$V^* := \{\varphi : V \to \mathbb{K} | \text{خطی است}\ \varphi\}$$

و به هر نگاشت خطی $f : V \to W$، نگاشت دوگان $f^* : W^* \to V^*$ وابسته می‌شود، که بنابر تعریف، $f^* : \alpha \mapsto \alpha \circ f$. از این‌رو $\mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_{V^*}$ و $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$، و در نتیجه، $*$ یک تابعگون (پادوردا) است.

تابعگونهایی که علاوه بر محتوا، از توان ریاضی نیز برخوردار باشند، مسلماً دشوارتر به‌دست می‌آیند، اما بیشتر از تابعگون اخیر هستند. هدف این بخش فقط معرفی این مفهوم است، و اکنون مطلب را با مثال

1. forgetful functors 2. dual space

ساده‌ای در ارتباط با مانسته‌جایی، به‌پایان می‌رسانیم. یادآوری می‌کنیم که منظور از $[X, Y]$ مجموعهٔ رده‌های مانسته‌جایی نگاشتهای پیوستهٔ $X \to Y$ است. پس

مثال. فرض کنیم B یک فضای توپولوژیک باشد. در این‌صورت، $[\cdots, B]$ به‌طور متعارف، معرّف یک تابعگون پادوردا از رستهٔ مانسته‌جایی به رستهٔ مجموعه‌ها و نگاشتها، به‌شرح زیر است: به هر فضای توپولوژیک X، مجموعهٔ $[X, B]$ را وابسته می‌کنیم و به هر ریختی $[f] \in [X, Y]$ از رستهٔ مانسته‌جایی، نگاشت

$$[f, B] : [Y, B] \to [X, B]$$

را با تعریف

$$[f, B] : [\varphi] \mapsto [\varphi \circ f]$$

وابسته می‌کنیم.

۶. توپولوژی جبری چیست؟

به‌طور خیلی خلاصه، موضوع توپولوژی جبری، حلّ مسائل توپولوژی با روشهای جبری است. اما اصلاً معنای ملموس این عبارت چیست؟ هم اکنون آن‌را با جزئیات بیشتر شرح می‌دهیم.

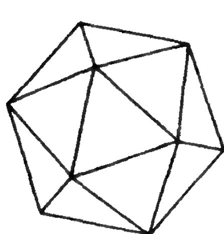
آنچه که امروز توپولوژی جبری نامیده می‌شود، از دیدگاه قدیمتر، در عین حال ساده‌تر و روشنتر، پیدا کردن، محاسبه و استفاده از ناورداها[1] بوده است. تناظری چون χ که به هر X در یک ردهٔ مفروضی از اشیاء هندسی، عددی مانند $\chi(X)$ را وابسته می‌کند، یک ناوردا نامیده می‌شود هرگاه شرط $X \cong Y$، همواره مستلزم تساوی $\chi(X) = \chi(Y)$ باشد. اما اینکه این تعریف متعرض چه نوع اشیاء و یکریختیهای «$\cong$» باشد، به‌حالت خاص مورد بحث بستگی دارد. مثلاً هنگامی‌که از «ناورداهای توپولوژیک»[2] صحبت می‌کنیم، نماد $\cong$ را به‌معنی همسانریختی می‌گیریم، در حالی‌که اگر از «ناورداهای هموارریختی»[3] بحث کنیم نماد $\cong$ را به‌معنی هموارریختی به‌کار می‌بریم و هکذا.

بدون شک، قدیمترین مثال مهم از این‌گونه ناورداها، عدد یا مشخصهٔ اویلر[4] برای چند وجهیهای متناهی است. فرض کنیم P یک چند وجهی[5] در $\mathbb{R}^n$ متشکّل از تعداد a_0 رأس، a_1 یال، a_2 وجه دوبعدی باشد (ما در اینجا وارد تعریف دقیق این مفاهیم نمی‌شویم). در این شرایط، عدد

$$\chi(P) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$$

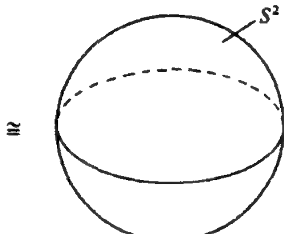
1. invariants 2. topological invariants 3. diffeomorphism invariants
4. Euler characteristic 5. polyhedron

عدد اویلر[1] چند وجهی P نامیده می‌شود و قضیهٔ مهم ناوردایی زیر برقرار است: عدد اویلر، یک ناوردای توپولوژیک است. این قضیه، برای همهٔ فضاهای توپولوژیک X، که با چند وجهیهای متناهی همسانریخت هستند، بی‌درنگ یک ناوردای توپولوژیک به‌دست می‌دهد: بنابر قضیهٔ ناوردایی، $\chi(X)$ به‌عنوان عدد اویلرِ یک چند وجهیِ همسانریخت با X، خوشتعریف است.

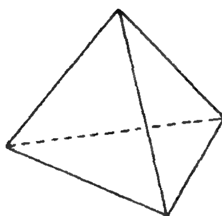


درمورد رویهٔ بیست‌وجهی P_1

$a_0 + a_1 + a_2 =$
$12 - 30 + 20 = 2$



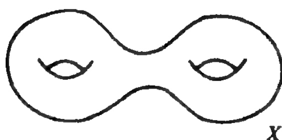
$\chi(S^2) = 2$

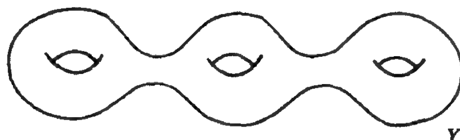


درمورد رویهٔ چهاروجهی P_2

$a_0 + a_1 + a_2 =$
$4 - 6 + 4 = 2$

این ناورداها را چگونه می‌توان در حل مسائل هندسی به‌کار برد؟ در اینجا مثالی می‌آوریم. رویه‌های X و Y زیر را در نظر می‌گیریم:





آیا X و Y همسانریخت‌اند؟ این رویه‌ها، هر دو، فشرده و همبند و البته هاوسدورف نیز هستند: بنابراین فوراً نمی‌توان اختلاف آنها را تشخیص داد، و این واقعیت هم که قادر نیستیم یک همسانریختی بین آنها برقرارکنیم چیزی را ثابت نمی‌کند. اما حکم $X \ncong Y$ به طریقی می‌تواند از $۳ \neq ۲$ نتیجه شود. مگر چنین نیست؟ در واقع همین‌طور است، زیرا نتیجهٔ محاسبهٔ مشخصه‌های اویلرِ آنها چنین است که $\chi(X) = -۲$ و $\chi(Y) = -۴$ پس X و Y نمی‌توانند همسانریخت باشند، همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

از جملهٔ ناورداهای توپولوژیک دیگری که در اوایل سدهٔ بیستم، پیش از پیدایش دیدگاه جدید، شناخته شده بودند، می‌توان مثلاً «اعداد بتی»[2] b_i و «ضرایب پیچش»[3] را نام برد. اعداد بتی با ضابطهٔ $\chi = \sum(-۱)^i b_i$ به مشخصّهٔ اویلر مربوط می‌شوند. اما دو فضا ممکن است مشخصهٔ اویلر برابر ولی اعداد بتی متفاوت داشته باشند. پس، با این تعبیر، می‌توان گفت که اعداد بتی ناورداهای «برتر»ی هستند و اطلاعات بیشتری می‌توان از آنها بدست آورد.

---

1. Euler number 2. Betti numbers 3. torsion coefficients

از دیدگاه جدید، موضوع توپولوژی جبری، یافتن، محاسبه و کاربرد تابعگونهایی از رسته‌های «هندسی» (مانند $\mathscr{Top}$، $\mathscr{Diffdiff}$، ...)، به رسته‌های «جبری» (مانند رستهٔ گروهها، رستهٔ حلقه‌ها و غیره) است.

یک مثال اساسی، که راه را برای گسترش دیدگاه جدید هموار کرده است، مثال «مانستگی»[1] است: به‌ازای هر $k \geqslant o$، تابعگون (هموردای) مانستگی k بعدی[2] H_k، از رستهٔ توپولوژی، به رستهٔ گروههای آبلی. ریاضیدانان به‌تدریج مهارت بیشتری در ابداع تابعگونهای مناسب به‌دست آورده‌اند، و امروزه، تعداد فراوانی تابعگون در توپولوژی جبری مورد استفاده است، که بعضی هموردا و برخی پادوردا هستند. خصوصاً به مفهوم کم‌و بیش مبهم رستهٔ «هندسی» باید در زمینهٔ بسیار گسترده‌تری پرداخته شود. مثلاً در آنالیز، اشیاء «هندسی» و رسته‌های هندسی (مانند فضاهای مختلط،[3] ، خمینه‌های مختلط[4] ، رویه‌های ریمانی[5] و غیره) مطالعه می‌شوند که می‌توانند از دیدگاه توپولوژی مورد بررسی قرارگیرند (در واقع قرارگرفته‌اند)، و با استفاده از تابعگون «نادیده‌گیر»، این مطالعات به رستهٔ توپولوژیک و تابعگونهایی که روی آنها تعریف شده‌اند، منتقل شوند:

$$\text{رستهٔ گروههای آبلی} \xrightarrow{\text{مثلاً } H_k} \text{رستهٔ توپولوژیک} \xrightarrow{\text{تابعگون نادیده‌گیر}} \text{رستهٔ فضاهای مختلط}$$

اما، کاملاً مستقل از اینها نیز، در آنالیز مختلط با استفاده از روشهای تحلیلی مستقیماً تابعگونهایی از رسته‌های «مختلط تحلیلی» به رستهٔ جبری ساخته می‌شوند. این تابعگونها که به‌طور تحلیلی تعریف شده‌اند اغلب «برتر» از تابعگونهای توپولوژیک هستند، زیرا ساختار مختلط را «نادیده» نمی‌گیرند.

خوب ببینیم همهٔ این تابعگونها، چه سودی دارند؟ برای جواب، نخست مایلم اشاره کنم که اصول موضوعهٔ تابعگونها، مستلزم «ناوردایی» به معنای زیر است: اگر H یک تابعگون هموردا و $f : X \to Y$ یک یکریختی باشد، آنگاه $H(f) : H(X) \to H(Y)$ (و در حالت پادوردا، $H(Y) \to H(X)$) نیز یکریختی است. زیرا اگر g ریختی وارون f باشد، روشن است که $H(g)$ وارون $H(f)$ خواهد بود. به‌ویژه از $X \cong Y$، همیشه نتیجه می‌شود که $H(X) \cong H(Y)$: این‌گونه «قضایای ناوردایی» مستقلاً همراه هر تابعگون، پدیدار می‌شوند، و می‌توان رده‌های یکریختی این اشیاء جبری را درست همان‌گونه که در ناورداهای عددی عمل می‌شد، به‌عنوان ابزاری برای تشخیص اشیاء هندسی به‌کار برد. در واقع می‌توان ناورداهای کلاسیک را نیز مانند ناورداهای این اشیاء جبری به‌دست آورد: مثلاً، iامین عدد بتی برابر است با رتبهٔ iامین گروه مانستگی، یعنی $b_i(X) = \text{rk}^6 H_i(X)$ و $\chi(X) = \sum_{i=o}^{\infty} (-1)^i \text{rk} H_i(X)$ و غیره. همین کافی است نشان دهد که تابعگونهای جدید، بدتر از ناورداهای کلاسیک نیستند. برعکس،

---

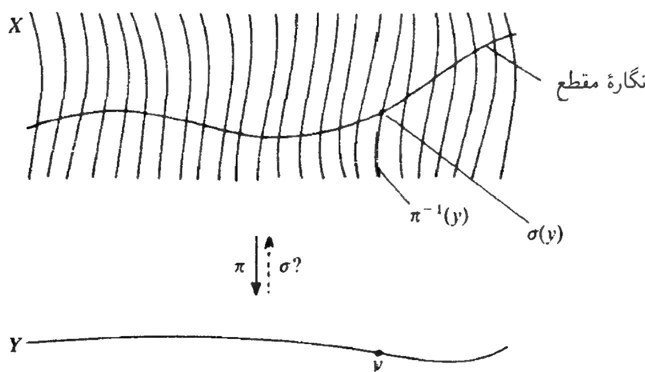
1. homology
2. k - dimensional homology functor
3. complex spaces
4. complex manifolds
5. Riemann surfaces
6. rk معرّف واژهٔ rank، یعنی رتبه است.

چنانچه اکنون شرح خواهیم داد، دیدگاه جدید توپولوژی جبری، نسبت به دیدگاه قدیمی، واقعاً از مزایایی برخوردار است.

من به‌این واقعیت نمی‌پردازم که اشیاء جبریِ $H(X)$ در حالت کلی شامل اطلاعاتی بیش از ناورداها هستند، و موجب تمایز اشیاء هندسیی می‌شوند که ناورداها برای آنها فقط در حکم یک «∞» بیروح هستند، و یا اینکه اصولاً قابل تعریف نیستند. لذا مستقیماً به اصل مسأله می‌پردازم: تابعگونها گذشته از اینکه دربارهٔ اشیاء هندسی اطلاعاتی به‌ما می‌دهند، دربارهٔ ریختیهای هندسی، دربارهٔ نگاشتها، نیز اطلاعاتی در اختیار ما می‌گذارند! مثال زیر منظور ما را روشن می‌کند.

بعضی اوقات یک مسألهٔ هندسی به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

نگاشتی پیوسته و پوشا مانند $\pi : X \to Y$ داریم که مثلاً می‌دانیم یک‌به‌یک نیست (درنتیجه مسلماً وارون ندارد)، می‌خواهیم ببینیم که یک مقطع[1] دارد یا نه، یعنی آیا یک نگاشت پیوستهٔ $\sigma : Y \to X$ وجود دارد به‌گونه‌ای که تساوی $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_Y$ برقرار باشد؟



در بسیاری از رسته‌های دیگر نیز، غالباً به مسأله‌ای مشابه برمی‌خوریم. هدف اصلی این مسأله، به‌طور کلّی، در این خلاصه می‌شود که ببینیم یک ریختی $\pi : X \to Y$ یک «وارون راست» دارد یا نه، یعنی آیا ریختی چون $\sigma : Y \to X$ با شرط $\pi \circ \sigma = ۱_Y$ وجود دارد یا نه؟ مثلاً، فرض می‌کنیم یک نگاشت پیوسته و پوشا چون π از $S^۳$ به $S^۲$ داریم. آیا π می‌تواند مقطعی داشته باشد؟ می‌توانید ببینید که محاسبهٔ ناورداهای $S^۲$ و $S^۳$ فایده‌ای ندارد، زیرا موضوع مساوی یا متمایز بودن ناورداها مطرح نیست. اما اگر از یک تابعگون مناسبی استفاده کنیم، مسأله تغییر می‌کند: چنانچه یک σ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که حاصل ترکیب

$$S^۲ \xrightarrow{\sigma} S^۳ \xrightarrow{\pi} S^۲$$

1. section

همانی باشد، در آن صورت، بنابر اصول موضوعهٔ تابعگون، حاصل ترکیب

$$H(S^۲) \xrightarrow{H(\sigma)} H(S^۳) \xrightarrow{H(\pi)} H(S^۲)$$

اجباراً همانی خواهد بود. حال اگر، به‌عنوان مثال، از مانستگیِ ۲ ـ بعدی استفاده کنیم، خواهیم داشت $H_۲(S^۲) \cong \mathbb{Z}$ و $H_۲(S^۳) = o$، و در نتیجه باید حاصل ترکیب

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{H(\sigma)} o \xrightarrow{H(\pi)} \mathbb{Z}$$

برابر همانی روی $\mathbb{Z}$ باشد، که این هم آشکارا ناممکن است. بدین ترتیب، هیچ نگاشتی از $S^۳$ به $S^۲$ نمی‌تواند مقطعی بپذیرد.

این تنها یک مثال ساده ازکاربرد، اما نوعاً مثالی از برتری دیدگاه تابعگونی در همهٔ مسائل مربوط به نگاشتها بود. حتی اگر توجه ما فقط معطوف به خود اشیاء هندسی می‌بود، دیدگاه قدیمی توپولوژی جبری نمی‌توانست چندان گسترش وسیعی پیدا کند، زیرا مطالعهٔ فضاها و نگاشتها، آن‌قدر به‌هم مربوط‌اند که هرگونه گسترش یک طرفه‌یی که فقط روی فضاها متمرکز شود و نگاشتها را نادیده بگیرد، به بن‌بست منتهی می‌شود.

۷. مانسته‌جایی—به چه درد می‌خورد؟

پس از این‌همه مقدّمه‌چینی، اکنون می‌توانم جواب معقولی به پرسش فوق بدهم. در حقیقت، دو دلیل عمده برای مفید بودن مفهوم مانسته‌جایی می‌آورم که با همدیگر ارتباط درونی دارند. دلیل نخست آن، ناوردا بودن مانسته‌جاییِ[1] اکثر تابعگونهای توپولوژیِ جبری است. توضیحاً، یک تابعگون H بر رستهٔ فضاهای توپولوژیک، ناوردای مانسته‌جایی نامیده می‌شود، هرگاه رابطهٔ $f \simeq g$ همواره مستلزم رابطهٔ $H(f) \cong H(g)$ باشد. بنابراین، می‌توان چنین انگاشت که این‌گونه تابعگونها بر رستهٔ مانسته‌جایی تعریف شده‌اند وکاربرد آنها در رسته $\mathcal{Top}$ ناشی از ترکیب با تابعگون متعارف است، یعنی به شکل $\mathcal{Top} \to \mathcal{Htop} \to \mathcal{A}$ است. البته از اصول موضوع تابعگون، نتیجه می‌شود که یک تابعگونِ ناوردای مانسته‌جایی، اشیاء یکریخت را به فضاهای هم‌ارز مانسته‌جایی مربوط می‌کند: رابطهٔ $X \simeq Y$ مستلزم رابطهٔ $H(X) \cong H(Y)$ است. علاوه بر رستهٔ فضاهای توپولوژیک، رسته‌های دیگری نیز می‌توانند، نخست با تغییر مناسبِ مفهوم مانسته‌جایی، مفهوم تابعگونهای ناوردای مانسته‌جایی را بپذیرند، و همان‌طورکه قبلاً گفتم، بسیاری از تابعگونهای توپولوژی جبری (ولی نه همهٔ آنها)، ویژگی ناوردایی مانسته‌جایی را دارند.

به هر حال، این مطلب غیرقابل قبول نیست، زیرا معنی ناوردایی مانسته‌جایی این است که به‌ازای

1. homotopy invariance

هر مانسته‌جایی h، ریختیهای $H(h_t)$ مستقل از t هستند، که در نتیجه، با توجه به همبندی بازهٔ $[o, 1]$، اصلاً بدین معنی است که $H(h_t)$ نسبت به t، موضعاً ثابت[1] است. با این تعبیر، می‌توان گفت که: «برای تغییر شکلهای بسیار کوچک یک نگاشت، ریختیِ جبریِ متناظر با این نگاشت، تغییر نمی‌کند»، ناوردا بودن مانسته‌جایی در خودِ طبیعتِ تناظرهایی قرار دارد که رفتار پیوسته را به رفتار معمولی جنبه‌های جبری مبدل می‌سازند.

پذیرفتیم، اما ببینیم چرا این مطلب آن‌قدر مهم است؟ می‌توان چنین پاسخ داد: زیرا محاسبه‌پذیری تابعگونها تا حدّ زیادی بر پایهٔ این واقعیت قرار دارد! بهترین تابعگونها هم، اگر قابل محاسبه نباشند، به هیچ درد نمی‌خورند. به‌کار بردن مستقیم تعاریف، بیش از اندازه پیچیده خواهد بود، درحالی‌که استفاده از ناوردایی مانسته‌جایی و گذر به فضاهای هم‌ارز مانسته‌جا، غالباً کار را ساده‌تر می‌کند.

آنچه واقعاً انجام می‌شود این‌است که فقط در مورد دو ـ سه فضای استاندهٔ به غایت ساده (مثلاً فضای تک نقطه‌یی، فضای S^1 و فضاهای شبیه آنها)، به اتکای تعریف، محاسبات مستقیم را انجام می‌دهیم و سپس «قانونهایی» را به‌کار می‌بریم، که ناوردایی مانسته‌جایی یکی از مهمترین آنهاست (و دیگر قوانین، مثلاً عبارت‌اند از اصل مایر ـ ویتوریس[2]، دنباله‌های دقیق طولانی[3]، دنباله‌های طیفی[4]، ...).

دومین دلیل اصلیِ فایدهٔ مفهوم مانسته‌جایی، امکان «تبدیل» برخی مسائل هندسی به مسائل مانسته‌جایی است. هنگامی‌که یک تابعگون توپولوژی جبری را برای یک وضعیت هندسی، یعنی برای کلیهٔ فضاها و نگاشتهای دخیل در آن، به‌کار می‌بریم، معمولاً به یک «نمایش»[5] جبری فوق‌العاده ساده، و به‌همین علّت، روشنترِ این وضعیت هندسی می‌رسیم. بنابراین، مسائل هندسی به مسائل جبری (ساده‌تر) ترجمه می‌شوند و از راه پاسخ دادن به مسائل اخیر، می‌توانیم اطلاعاتی، دست‌کم جزیی، دربارهٔ مسائل هندسی مورد بحث به‌دست آوریم. مثلاً، برای این‌که $f : X \to Y$ یک وارون راست داشته باشد، مسلماً لازم است که $H(f) : H(X) \to H(Y)$ نیز وارون راست داشته باشد، اما عکسِ این حکم صادق نخواهد بود، یعنی شرط فوق در حالت کلی کافی نیست. این تابعگون همهٔ جنبه‌های اساسی این مسألهٔ هندسی را منعکس نمی‌کند، بلکه فقط یک جنبهٔ آن‌را نشان می‌دهد. و اما، رستهٔ مانسته‌جایی، به‌اصطلاح، در نیمهٔ راه بین قطب سرکش توپولوژی و قطب ساده‌سازیهای بیش از اندازهٔ جبری، قرار دارد. از سویی، بسیار «ظریف» عمل می‌کند و، همان‌گونه که ناوردایی مانسته‌جاییِ بسیاری از تابعگونها گواه آن‌است، به‌رستهٔ توپولوژیک نزدیک است. از این‌رو، گاهی شرایط مانسته‌جایی واقعاً کافی هستند و می‌توان مسألهٔ اولیهٔ توپولوژی را از حلّ نمایش آن در رستهٔ مانسته‌جایی حل کرد. از سوی دیگر، همین رستهٔ مانسته‌جایی باز

1. locally constant 2. Mayer - Vietories principle 3. long exact sequences
4. spectral sequences 5. representation

ناهموار و به اندازهٔ کافی جبری است، و لذا محاسبات را کاملاً خارج از دسترس قرار نمی‌دهد. با بیان غیرفنی، می‌توان گفت که تعداد رده‌های مانسته‌جایی خیلی کمتر از تعداد نگاشتهاست، به‌طوری‌که می‌توان تا اندازه‌ای به یک دید کلی نسبت به $[X, Y]$ دست یافت. به‌عنوان مثال، خمهای بستهٔ فراوان و بسیار پیچیده‌ای به‌شکل $S^1 \to \mathbb{C}\backslash o$ وجود دارند، اما $[S^1, \mathbb{C}\backslash o] = \mathbb{Z}$ («عدد دور»[1]).

«گروههای مانسته‌جاییِ»[2] یک فضای توپولوژیک، یکی از عواملی هستند که به رستهٔ مانسته‌جایی از لحاظ جبری سر و صورت می‌بخشند. اکنون می‌خواهم اندکی از موضوع اصلی بحث خود منحرف شوم و به تعریف آنها بپردازم. برای این کار، به‌اندکی نمادگذاری نیازمندم: منظور از یک فضای نقطه پایه‌یی[3]، یک زوج (X, x_o) متشکل از یک فضای توپولوژیک X و یک نقطهٔ آن، $x_o \in X$، است. چه بودِ نگاشتهای پیوستهٔ نقطه ـ پایه نگهدار[4] $(X, x_o) \to (Y, y_o)$، و هکذا مانسته‌جاییهای نقطه ـ پایه نگهدار بین چنین نگاشتهایی، برای ما روشن است. مجموعهٔ این‌گونه رده‌های مانسته‌جایی را با $[(X, x_o), (Y, y_o)]$ نمایش می‌دهیم. حال فرض کنیم N نقطهٔ ثابتی در کرهٔ n بعدی S^n باشد، $n \geqslant 1$، مثلاً N را قطب شمال می‌گیریم. در این‌صورت،

$$\pi_n(X, x_o) := [(S^n, N), (X, x_o)]$$

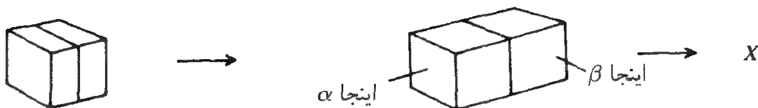
ساختار متعارف یک گروه (گروه آبلی، برای $n \geqslant 2$) را دارد که n امین گروه مانسته‌جایی (X, x_o) نامیده می‌شود. هم‌اکنون به شرح این گروه می‌پردازم.

ساده‌ترین راه توضیح قانون گروهی آن‌است که کرهٔ n بعدی را به‌صورت خارج‌قسمت $I^n/\partial I^n$ در نظر بگیریم، که از مکعب $I^n := [o, 1]^n$ با فرو ریختن مرز آن یعنی:

$$\partial I^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in I^n | \text{دست‌کم یکی از } x_i \text{ها } o \text{ یا } 1 \text{ است}\}$$

به‌دست می‌آید (رجوع کنید به صفحات ۵۴ـ۵۵ و ۱۱۹). اکنون، یک‌بار برای همیشه، یک همسانریختی $I^n/\partial I^n = S^n$ را، که نقطهٔ ∂I^n را به‌قطب شمال می‌برد، در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب، نگاشتهای پیوستهٔ $(S^n, N) \to (X, x_o)$ دقیقاً نگاشتهای پیوستهٔ $I^n \to X$ هستند که همهٔ مرز ∂I^n را به x_o می‌برند. اکنون اگر α و β دو نگاشت از این قبیل باشند، یک نگاشت $X \to [o, 2] \times [o, 1]^{n-1}$ به‌شیوهٔ معلوم زیر تعریف می‌کنیم: α را بر نیمهٔ سمت چپ و β را بر نیمهٔ سمت راست می‌گیریم، و سپس این نگاشت را با نگاشتی دیگر به شکل $I^n \to [o, 2] \times I^{n-1}$، که مختص نخست را دو برابر منبسط می‌کند، ترکیب می‌کنیم:

1. winding number
2. homotopy groups
3. space with basepoint
4. basepoint preserving continuous maps

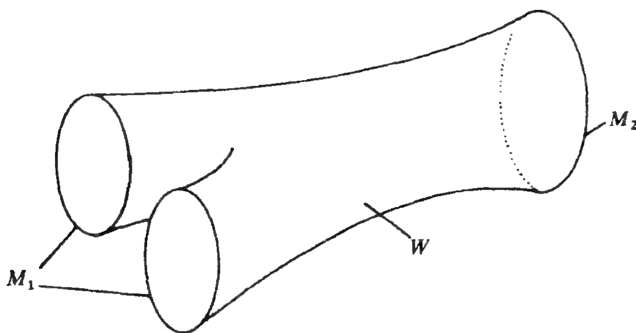


حاصل ترکیب، عضو دیگری از $\pi_n(X, x_o)$ را نمایش می‌دهد که به‌عنوان حاصل ترکیب اعضای $[\alpha], [\beta] \in \pi_n(X, x_o)$ تعریف و با نماد $[\alpha][\beta]$ نمایانده می‌شود (مثلاً، رجوع کنید به مرجع [۱۱]، ص ۵).

*

اکنون دوباره مطلب را از سر می‌گیریم. این موضع مانسته‌جایی، یعنی واقع شدن در وسط راه بین توپولوژی و جبر، امکان می‌دهد که مسائل مهم هندسی را بگیریم، و ابتدا آنها را در قالب مسائل مانسته‌جایی بیان و سپس با استفاده از حساب نظریهٔ مانسته‌جایی، کلاً یا جزئاً حل کنیم. مسلماً این‌گونه کارها را باید با راهها و ابزارهایی فراتر از سطح این کتاب انجام داد. شاید برای یک ناظر تیز بین و خرده‌گیر، صحبت از آنها در اینجا خوشایند نباشد. اما این خرده‌گیری نمی‌تواند مرا از ذکرِ، دست‌کم، یک مثال جالب برای ارضای حس کنجکاوی تحریک شدهٔ شما باز دارد.

دو خمینهٔ دیفرانسیلپذیر n بعدی فشرده و بی‌مرز[1] $M_۱$ و $M_۲$ را «مرزپوش»[2] گویند هرگاه یک خمینهٔ فشردهٔ $(n + ۱)$ بعدی مرزدار[3] W بتوان یافت که مرز آن، اجتماع جدا از هم $M_۱$ و $M_۲$ باشد:



«مرزپوشی» یک رابطهٔ هم‌ارزی است، و رده‌های هم‌ارزی، که «رده‌های مرزپوشی»[4] نامیده می‌شوند، یک گروه آبلی $\mathfrak{N}_n$ تشکیل می‌دهند که قانون ترکیب آن به‌کمک اجتماع جدا ازهم تعریف می‌شود.
مسأله: این گروهها را معین کنید.

حل این مسأله، با رده‌بندی خمینه‌های n بعدی با تقریب مرزپوشی[5]، هم‌ارز است. هرچند مرزپوشی در مقایسه با هموارریختی، رابطهٔ کاملاً ضعیفی است، اما در توپولوژی دیفرانسیل، دلایل عدیده‌ای برای

1. without boundary 2. bordant 3. with boundary
4. bordism classes 5. up to bordism

استقبال از رده‌بندیهای ضعیفتر وجود دارد. زیرا تا به امروز، در خمینه‌های بُعد بالا، شناخت اندکی از رده‌بندی با تقریب هموارریختی[1] داریم، و در حول و حوش زمان پیدایش موضوع مورد بحث ما، یعنی اویل دهۀ ۱۹۵۰ ـ ۱۹۶۰، هیچ چیز شناخته نشده بود. به‌علاوه، مرزپوشی آن‌قدرها هم که در نگاه نخست به‌نظر می‌آید، ضعیف نیست؛ برخی ویژگیهای مهم خمینه‌ها را حفظ می‌کند، و به هر حال، نشان داده شده است که رده‌بندی با تقریب مرزپوشی، خیلی ثمربخش و مفید بوده است.

با توجه به توضیحاتی که فوقاً اشاره شد، این مسأله (تعیین گروههای مرزپوشی، $\mathfrak{N}_n$، م.) چندان سهل‌الوصول به‌نظر نمی‌رسد! رنه توم آن‌را در ۱۹۵۴ با استفاده از روشهای نظریۀ مانسته‌جایی حل کرد. من نتیجۀ توم را در اینجا نمی‌آورم ← (مرجع [۱۸])، اما باید توجه کرد که $\mathfrak{N}_n$ها گروههای آبلی متناهی‌اند، که برای nهای متفاوت گروههایی کاملاً متفاوت‌اند، و همۀ آنها را نمی‌توان تنها به اتکای شهود هندسی، حدس زد. اما ذکر چند کلمه دربارۀ بیان این مسأله به زبان مانسته‌جایی را بی‌مناسبت نمی‌بینم. در فصل سوم، بخش ۴، از خمینۀ گراسمانِ $O(n+k)/O(k)\times O(n)$ صحبت کردیم و گفتیم که نقاط این خمینه، زیر فضاهای برداری k بعدی در R^{n+k} هستند. بر این خمینه، یک کلاف برداری k بعدی متعارف (به‌نام «کلاف گراسمان»[2]) وجود دارد، که تارآن در نقطۀ $\xi\subset\mathbb{R}^{n+k}$ دقیقاً خودِ فضای k بعدی ξ است (و یا دقیقتر بگوییم $\{\xi\}\times\xi$ است، زیرا تارها باید دو به‌دو جدا ازهم باشند). فضای این کلاف برداری را با $M_nO(k)$ نمایش می‌دهیم (فصل سوم، بخش ۶، مثال ۵، دیده شود)، و آن‌را فضای توم می‌نامیم. توم توانست ثابت کند که: برای kهای بزرگ، گروه مانسته‌جایی $\pi_{n+k}(M_nO(k))$، با گروه $\mathfrak{N}_n$ یکریخت است. بنابراین، محاسبۀ این گروههای مانسته‌جایی، همان مسألۀ مانسته‌جایی است که می‌توان مسألۀ مرزپوشی را به‌آن بدل نمود. توم توانست این مسألۀ مانسته‌جایی را حل کند، و برای این کار، از روشهای جدید ژان پییرسر[3] بهره گرفت. روشهای ژان پییرسر، اندک زمانی پیش از راه‌حل توم، به‌دنبال یک دورۀ طولانی رکود در نظریۀ مانسته‌جایی، ابداع شده است و به منزلۀ یک راهگشا در نظریۀ مانسته‌جایی به‌شمار می‌آید.

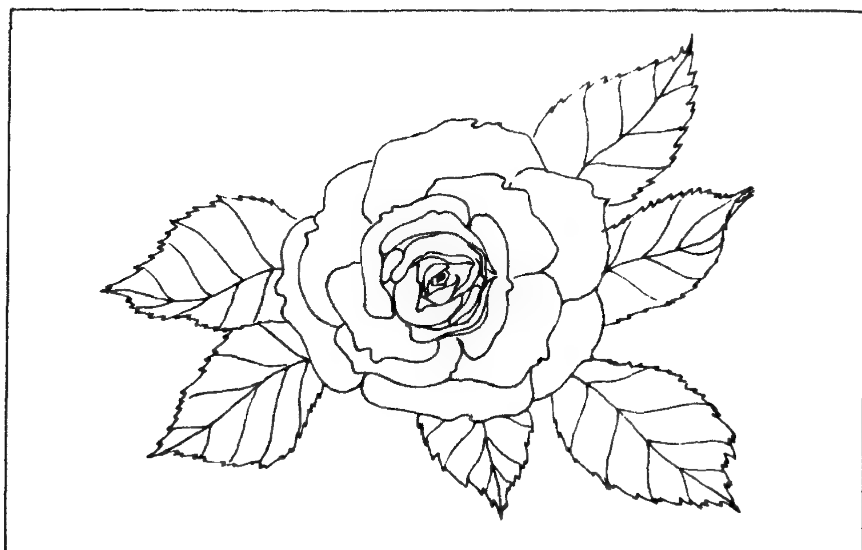
خیلی دلم می‌خواست که در اینجا به روش «ساختمان پونتریاگین ـ توم»[4] اشاره کنم، روشی که توم برای تبدیل مسأله مرزپوشی به مسأله مانسته‌جایی به‌کار گرفت، و دلم می‌خواست به شما بگویم که چگونه این روش ساختمان به یک روش قبلی پونتریاگین (۱۹۳۸) و حتی به روش بازهم قدیمیترِ هوپف[5] (۱۹۲۶)، که در بسط توپولوژی نوین فوق‌العاده جالب توجه و آموزنده است، مربوط می‌شود. اما، یک بار هم که شده است، در برابر این وسوسه، مقاومت می‌کنم . . .

---

1. up to diffeomorphism 2. Grassmann bundle 3. J. P. Serre
4. Pontrjagin-Thom construction 5. Hopf

۶

دو اصل موضوع شمارایی

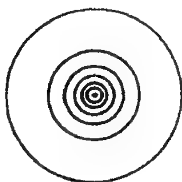


۱. اصلهای موضوع اول و دوم شمارایی

این فصل کوتاه، مستقیماً به مفاهیم پایه مربوط می‌شود. یادآوری می‌کنیم که یک مجموعهٔ $\mathfrak{B}$ از مجموعه‌های باز در X، یک پایه برای توپولوژی X نامیده می‌شود هرگاه هر مجموعهٔ باز، اجتماعی از مجموعه‌های عضو $\mathfrak{B}$ باشد. اکنون «پایهٔ همسایگی» را نیز به‌این مفهوم می‌افزاییم.

تعریف(پایهٔ همسایگی). فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $x_o \in X$. یک مجموعه چون $\mathfrak{A}$ از همسایگیهای x_o را، یک پایهٔ همسایگی[1] x_o می‌نامیم هرگاه هر همسایگی x_o شامل یک همسایگی عضو $\mathfrak{A}$ باشد.

مثال. مجموعهٔ همهٔ همسایگیهای x آشکارا یک پایهٔ (غیر جالب) همسایگی است. حال فرض کنیم $X = \mathbb{R}^n$. مجموعهٔ گویهای $K_{1/n}(x_o)$ به مرکز x_o و شعاع $\frac{1}{n}$، $n = 1, 2, \cdots$، تشکیل یک پایهٔ (شمارای !) همسایگی x_o را می‌دهد.



تعریف (اصلهای موضوع شمارایی). می‌گوییم یک فضای توپولوژیک در اصل موضوع شمارایی یکم[2] صدق می‌کند، و خود فضا را شمارای یکم می‌نامیم، هرگاه هر نقطهٔ آن، یک پایهٔ همسایگی شمارا داشته باشد. گوییم فضای X در اصل موضوع شمارایی دوم[3] صدق می‌کند، هر گاه یک پایهٔ شما را برای توپولوژی داشته باشد.

واضح است که اصل دوم اصل قویتری است: مجموعه‌های شامل نقطهٔ x_o در یک پایهٔ شمارا، آشکارا یک پایهٔ همسایگی شمارا برای x_o تشکیل می‌دهند: هر دو اصل، ویژگی ارثی دارند، یعنی به زیرمجموعه‌ها منتقل می‌شوند. فضای $\mathbb{R}^n$، و در نتیجه کلیهٔ زیرفضاهای آن، در هر دو اصل صدق می‌کنند (گویهایی که شعاع و مختصات مرکزشان گویا هستند، یک پایهٔ شمارا برای توپولوژی فضا تشکیل می‌دهند). فضاهای متریکپذیر، دست کم در اصل یکم شمارایی صدق می‌کنند. اگر d یک متریک باشد، dـ گویهای $K_{1/n}(x_o)$ یک پایهٔ همسایگی شمارا برای x_o تشکیل می‌دهند.

برای آنکه تفاوت بین این دو اصل را نیز ببینیم، مثالهایی از فضاهای شمارای یکم می‌آوریم که شمارای دوم نیستند. فضاهای ناشمارای گسسته، که آشکارا در این رسته قرار می‌گیرند، به خودی خود فضاهای جالبی نیستند، اما در جستجوی مثالهای بهتر، بهتر است که به نکتهٔ زیر توجه کنیم:

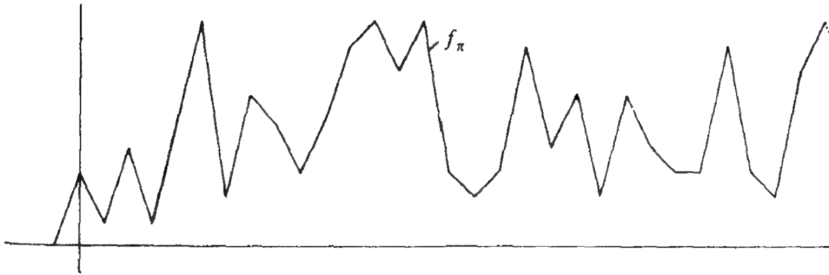
نکته. اگر یک فضای توپولوژیک شامل یک زیرمجموعهٔ ناشمارای گسسته باشد، نمی‌تواند شمارای

1. neighborhood basis　　2. first countability axiom
3. second countability axion

دوم باشد.

مثال ۱. فرض کنیم $C(\mathbb{R})$ فضای باناخ توابع پیوستهٔ کراندار بر $\mathbb{R}$ با نرم سوپرموم باشد. در این صورت، $C(\mathbb{R})$، فضای شمارای یکم هست (زیرا یک فضای متری است)، اما شمارای دوم نیست.

برهان. برای هر عدد حقیقی x که به‌صورت اعشاری نوشته شده است، یک تابع پیوستهٔ کراندار f_x را چنین تعریف می‌کنیم: مقدار این تابع، برای $n \in \mathbb{Z}$ برابر است با nامین رقم اعشاری پس از ممیز. در این صورت، به‌ازای $x \neq y$، همواره خواهیم داشت $\|f_x - f_y\| \geqslant ۱$، و معنی آن این است که مجموعهٔ $\{f_x | x \in \mathbb{R}\}$ یک زیرفضای گسستهٔ ناشمارای $C(\mathbb{R})$ است، و از این رو، $C(\mathbb{R})$ نمی‌تواند شمارای دوم باشد. □



مثال ۲. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت «تفکیک‌ناپذیر»[1]، یعنی فضای هیلبرتی باشد که پایهٔ هیلبرتی شمارا ندارد: بنابراین، مجموعهٔ اندیس هر پایهٔ هیلبرتی $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$، مجموعه‌ای است ناشمارا. پس، با توجه به آنکه به‌ازای $\lambda \neq \mu$، داریم $\|e_\lambda - e_\mu\| = \sqrt{۲}$، مانند مثال قبل نتیجه می‌گیریم که H در اصل دوم شمارایی صدق نمی‌کند، اما چون یک فضای متری است در اصل یکم صدق می‌کند.

۲. حاصلضربهای نامتناهی

بدون شک، میل داریم یک فضای توپولوژیک را هم که در هیچ‌یک از اصول شمارایی صدق نکند، ببینیم. فرصت را غنیمت شمرده، از این مسأله استفاده می‌کنم تا برای اولین بار، راجع‌به حاصلضرب تعداد دلخواهی فضای توپولوژیک صحبت کنم، موضوعی که در فصل دهم نیز مورد بحث قرار خواهیم داد.

منظور از حاصلضرب[2] یک خانواده $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از مجموعه‌ها، که با نماد $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ خانواده‌های $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از اعضای $x_\lambda \in X_\lambda$ است به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، یعنی:

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \{\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} | x_\lambda \in X_\lambda\}.$$

1. inseparable 2. product

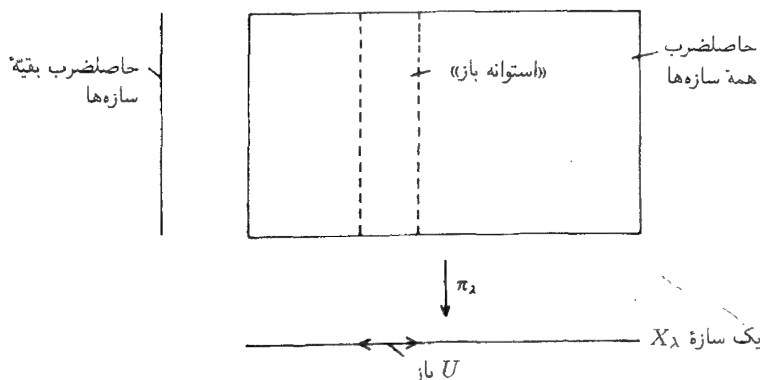
برای یک اندیس ثابت $\mu \in \Lambda$، تصویر[1] :

$$\pi_\mu : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\mu$$

بر سازهٔ μام با ضابطهٔ $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \mapsto x_\mu$ تعریف می‌شود، و x_μ را مؤلفهٔ[2] ، μـام نقطهٔ $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ نیز می‌نامند. برای مجموعهٔ اندیس $\Lambda = \{۱, \cdots, n\}$، البته بهتر است که به جای نماد $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\{۱,۲,\ldots,n\}}$، از نماد $(x_۱, \cdots, x_n)$ استفاده کنیم. در این‌صورت، نمادگذاریهای فوق، نظیر نمادگذاریهای متداول برای حاصلضربهای دکارتی متناهی، به شکل $X_۱ \times \cdots \times X_n$ درمی‌آید.

تعریف (توپولوژی حاصلضربی). فرض می‌کنیم $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد. منظور از توپولوژی حاصلضربی[3] درشت بافت‌ترین توپولوژی است که همهٔ تصویرها بر یک‌یک سازه‌ها نسبت به‌این توپولوژی، پیوسته باشند. مجموعهٔ $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ همراه با این توپولوژی را فضای حاصلضربی[4] می‌نامند.

نگاره‌های وارون مجموعه‌های باز هر سازه، تحت تصویر متناظر آن سازه، «استوانه‌های باز»[5] نامیده می‌شوند.



اشتراک متناهی استوانه‌های باز را، «حجره‌های باز»[6] می‌نامند. بدین‌ترتیب، استوانه‌های باز تشکیل یک زیرپایه برای توپولوژی حاصلضربی می‌دهند، به شکل

$$\{\pi_\lambda^{-۱}(U) | \lambda \in \Lambda, U \subset X_\lambda, \text{باز است} U\}$$

1. projection 2. component 3. product topology 4. product space
5. open cylinders 6. open boxes

و حجره‌های باز تشکیل یک پایه برای آن می‌دهند، به شکل

$$\{\pi^{-1}_{\lambda_1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi^{-1}_{\lambda_r}(U_r) | \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \Lambda, U_{\lambda_i} \subset X_{\lambda_i} \text{ باز است، } U_{\lambda_i}\}$$

همچنین می‌توان گفت که یک زیرمجموعهٔ حاصلضرب، مجموعه‌ای است باز برای توپولوژی حاصلضربی، هرگاه هر نقطهٔ آن عضو حجرهٔ بازی مشمول در این مجموعه باشد.

چنانچه همهٔ سازه‌ها برابر باشند، مثلاً هرگاه $X_\lambda = X$ به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، به جای نماد $\prod_{\lambda\in\Lambda} X$، از نماد X^Λ، نیز استفاده می‌کنیم. بنابراین، اعضای X^Λ اصلاً نگاشتهای (دلخواه) $X \to \Lambda$ خواهند بود.

حال، به بحث دربارهٔ اصول موضوعهٔ شمارایی باز می‌گردیم.

مثال ۱. اگر Λ ناشمارا باشد و هر یک از X_λها بیمایه نباشد (یعنی مجموعهٔ بازی غیر از $\varnothing$ و X_λ داشته باشد)، در این‌صورت فضای $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ شمارای یکم، و در نتیجه شمارای دوم هم نیست.

برهان. به‌ازای هر λ، یک مجموعهٔ باز U_λ در X_λ چنان انتخاب می‌کنیم که $\varnothing$ یا X_λ نباشد و یک نقطهٔ $x_\lambda \in U_\lambda$ در نظر می‌گیریم. اگر فرض کنیم که نقطهٔ $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک پایهٔ همسایگی شمارا دارد، لازم می‌آید که یک پایهٔ همسایگی شمارا متشکل از حجره‌های باز داشته باشد. اما فقط تعدادی شمارا از λها در تعدادی شمارا از جعبه‌های باز «دخالت می‌کنند». یک λ چنان در نظر می‌گیریم که در هیچ‌یک از حجره‌های مورد بحث دخالت نکند. بنابراین هیچ‌یک از این حجره‌ها در مجموعهٔ $\pi^{-1}_\lambda(U_\lambda)$، که یک پایهٔ همسایگی نقطهٔ مفروض است، قرار ندارد. این یک تناقض است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

مثال ۲. یک فضای هیلبرت بینهایت بعدی با توپولوژی ضعیف، شمارای یکم نیست (توضیحاً، توپولوژی ضعیف[1] یعنی درشت بافت‌ترین توپولوژیی که همهٔ تابعکهای خطی[2] یعنی نگاشتهای

$$< v, .. >: H \to \mathbb{K}, v \in H,$$

باز هم[3] پیوسته‌اند).

برهان، شبیه برهان مثال قبل است، خواه H تفکیک‌پذیر باشد یا نباشد، زیرا هر چند H یک پایهٔ هیلبرتی شمارا داشته باشد، نمی‌تواند پایهٔ شمارایی برای فضای برداری داشته باشد. رجوع شود به ص ۳۷۹ مقالهٔ نویمن، مرجع [۱۵].

1. weak topology 2. linear functionals

۳. هم برای توپولوژی خود فضا و هم برای توپولوژی ضعیف فضا. ـ م.

۳. نقش اصلهای موضوع شمارایی

اصل موضوع شمارایی یکم با همگرایی دنباله‌ها سروکار دارد.

نمادگذاری. به جای آنکه بگوییم «n_oی هست به گونه‌ای که برای هر $n \geqslant n_o$، $x_n \in U$»، خواهیم گفت «دنبالهٔ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ سرانجام در U می‌ماند». علت آن تا حدی کوتاهتر بودن عبارت آن و نیز بالاتر از همه، الهام‌بخش بودن آن است.

اگر $f : X \to Y$ پیوسته و $\lim x_n = a$ در X باشد، تساوی $\lim f(x_n) = f(a)$ در Y برقرار است. این مطلبی است معلوم و کاملاً پیش پا افتاده، زیرا اگر U یک همسایگی $f(a)$ باشد، $f^{-1}(U)$ یک همسایگی a خواهد بود و در نتیجه، دنبالهٔ (x_n) سرانجام در $f(U)$ می‌ماند و $f(x_n)$ در U. به‌علاوه، اگر X یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشد، عکس آن نیز برقرار است: نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر هر دنبالهٔ همگرا (در $X \subset \mathbb{R}^n$) به دنباله‌ای برده شود که به نگارهٔ حد دنبالهٔ اولی همگرا باشد. این صفت اختصاصی پیوستگی (که می‌توان آن‌را پیوستگی دنباله‌یی[1] نامید)، در مورد سایر فضاها برقرار نیست: همگرایی نگارهٔ دنباله‌ها تحت یک نگاشت به نقطهٔ مناسب، چنانچه در مثال زیر نشان خواهیم داد، در حالت کلی برای تضمین پیوستگی آن نگاشت کافی نیست.

مثال. فرض کنیم X مجموعهٔ نگاشتهای پیوستهٔ $[o, 1] \to [-1, 1]$ مجهز به توپولوژی حاصلضربی باشد یعنی توپولوژی آن از

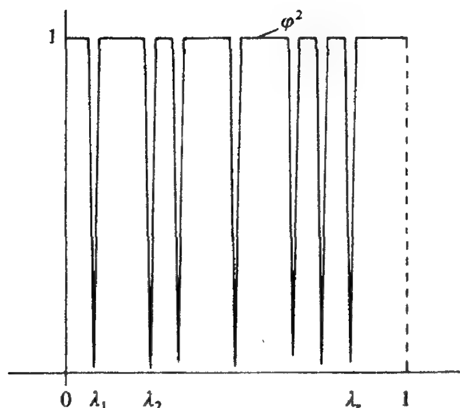
$$X \subset [-1, 1]^{[o,1]} = \prod_{\lambda \in [o,1]} [-1, 1]$$

به ارث گرفته شده باشد. پس، به‌عنوان یک مجموعه، با گوی یکهٔ فضای باناخ $C[o, 1]$ فرقی ندارد، اما توپولوژی مورد بحث آن به‌کلی متفاوت است. ببینیم همگرایی یک سری در این فضا به چه معنی است؟ یک دنباله در $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ همگرا به a است اگر و تنها اگر سرانجام در هر حجرهٔ باز حول a بماند، و یا باز هم اگر و تنها اگر، سرانجام در هر استوانهٔ باز حول a بماند، که این خود هم‌ارز است باآنکه بگوییم این دنباله، مؤلّفه به مؤلفه همگرا به a است. بنابراین، همگرایی در مثال فضای تابعی ما، چیزی جز مفهوم آشنای همگرایی نقطه‌یی نیست: برابری $\lim \varphi_n = \varphi$ به معنی آن‌است که برای هر $\lambda \in [o, 1]$، $\lim \varphi_n(\lambda) = \varphi(\lambda)$.

هر تابع پیوسته بر بازهٔ $[o, 1]$، به طریق اولی مربع آن انتگرالپذیر یا به‌اصطلاح مربعی ـ انتگرالپذیر[2] است، در نتیجه، یک نگاشت متعارف از X به فضای هیلبرت $L^2[o, 1]$، $X \to L^2[o, 1]$، متشکل از توابع مربعی ـ انتگرالپذیر روی $[o, 1]$، با ضابطهٔ $\varphi \mapsto \varphi$، خواهیم داشت. اما این نگاشت، دنباله‌یی پیوسته است (مثلاً با استفاده از قضیهٔ همگرایی لبگ[3])، اما پیوسته نیست. زیرا، اگر پیوسته بود، لازم

1. sequential continuity
2. square integrable
3. Lebesgue convergence theorem

می‌آمد که برای هر $o < \varepsilon$ یک حجرهٔ باز K حول مبدأ در فضای $[-۱, ۱]^{[o,۱]}$ بتوان یافت به‌گونه‌ای که برای هر $\varphi \in K \cap X$، داشته باشیم $\int_o^۱ \varphi^۲ dx < \varepsilon$. اما شرط «تعلق به K» شرطی است برای مقدار φ، در تعدادی متناهی از نقاط $[o, ۱]$، و چنین شرطی نمی‌تواند مانع آن باشد که $\int_o^۱ \varphi^۲ dX$ به دلخواه به عدد ۱ نزدیک شود:



گزارهٔ ۱. اگر X شمارای یکم و Y فضای توپولوژیک دلخواهی باشد، آنگاه نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است، اگر و تنها اگر پیوستهٔ دنباله‌یی باشد.

برهان. فرض‌کنیم f پیوستهٔ دنباله‌یی باشد و $a \in X$، و U یک همسایگی $f(a)$ باشد. باید نشان دهیم که: یک همسایگی V برای a هست که $f(V) \subset U$. فرض‌کنیم هیچ Vیی، خصوصاً اشتراک متناهی $V_۱ \cap \cdots \cap V_n$ از V_iهای عضو یک پایهٔ همسایگی شمارای نقطهٔ a، در این شرط صدق نکند. نقطهٔ $x_n \in V_۱ \cap \cdots \cap V_n$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $f(x_n) \notin U$. در این‌صورت، دنبالهٔ $(x_n)_{n\geqslant ۱}$ به a همگرا خواهد بود، زیرا در هر همسایگی a یک V_i قرار دارد و برای هر $n \geqslant i$، خواهیم داشت $x_n \in V_i$. اما، البته دنبالهٔ نگاره نمی‌تواند همگرا به $f(a)$ باشد، زیرا اصلاً به U نفوذ نمی‌کند، و این هم با پیوستگی دنباله‌یی f متناقض است، چیزی که می‌خواستیم اثبات کنیم. □

شاید مهمتر از مفهوم پیوستگی دنباله‌یی، مفهوم فشردگی دنباله‌یی باشد، و در این مورد نیز، اصل شمارایی یکم نقش تعیین‌کننده‌ای بازی می‌کند.

تعریف (فشردهٔ دنباله‌یی). یک فضای توپولوژیک X را فشردهٔ دنباله‌یی[1] گویند اگر هر دنباله در

1. sequentially Compact

X یک زیر دنبالهٔ همگرا داشته باشد.

غالباً مطلوب این‌است که فشردگی و فشردگی دنباله‌یی، یکی شوند، خواه به‌آن دلیل که گاهی زیردنباله‌های همگرا مورد نیازند، و خواه در جهت عکس: اطلاعات ما از دنباله‌ها خیلی بیشتر از اطلاعات ما از پوششهای باز است، مواردی که خصوصاً در فضاهای تابعی اغلب پیش می‌آید. اما این دو مفهوم فشردگی و فشردگی دنباله‌یی یکی نیستند، و حتی نمی‌توان گفت که یکی از آنها مستلزم دیگری است. به جای آنکه مثالی برای نکتهٔ اخیر بیاورم، یک منبع اطلاعات به شرح زیر تهیه می‌کنم: فرض‌کنیم $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ دو ویژگی توپولوژیک باشند و بخواهیم معلوم‌کنیم که استلزام $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ برقرار است یا نه. حال فرض‌کنیم شما حس می‌کنید که تحقیق آن بیش از حد مشکل، یا اعتماد به تحقیق دشوار، و یا صاف و پوست‌کنده بگوییم انجامش برای شما خسته‌کننده است. واضح است که در این‌صورت، اولین کتاب توپولوژی راکه در دسترس شماست برمی‌دارید و به فهرست راهنمای آن مراجعه می‌کنید تا ویژگیهای $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ را بیابید، و اگر حکم $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ واقعاً صادق باشد، احتمال زیاد هست که آن‌را به شکل یک لم درکتاب بیابید. اما اگر حکم $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ صادق نباشد، شانس شما، لااقل در حالت کلی، کمتر است. خوشبختانه کتاب خوبی برای این‌گونه موارد هست که خیلی عالی است. نام این کتاب، مثالهای نقض در توپولوژی، تألیف لِ. اَ. ستین و ی. آ. زِباخ، مرجع [۱۷] است. در این کتاب، ۱۴۳ تا از عجیب و غریبترین فضاهای توپولوژیک، یکایک تشریح شده‌اند. در پایان کتاب، یک «جدول مرجع» گنجانده شده است، که جدول بزرگی است و شما می‌توانید با یک نگاه تشخیص دهید که مثال مورد بحث کدام یک از ۶۱ ویژگی توپولوژیک مطرح شده را دارد ![۱]

تنهاکاری که شما باید انجام دهید، بررسی و جستجوی ویژگیهای $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ در ستونهای جدول است. ازجمله (برای آنکه به زمینهٔ مورد بحث بازگردیم)، در آن جدول، مثالهایی از فضاهایی خواهید یافت که فشرده‌اند ولی فشردهٔ دنباله‌یی نیستند،[۲] و بعکس [۳] به‌هر حال، گزارهٔ زیر را داریم:

گزارهٔ ۲. هر فضای فشردهٔ شمارای یکم، فشردهٔ دنباله‌یی نیز هست.

برهان. فرض کنیم $(x_n)_{n\geqslant 1}$ دنباله‌ای در X باشد. نخست، تنها با استفاده از فشردگی X، ملاحظه می‌کنیم که باید یک نقطهٔ $a \in X$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که این دنباله، در هر همسایگی

۱. تصویر بخش ابتدایی جدول مرجع کلی، مندرج در صفحهٔ ۱۹۴ کتاب «مثالهای نقض در توپولوژی» مرجع [۱۷]، در ص ۸۳ کتاب ینیش آمده است، که ترجمهٔ آن در صفحهٔ ۱۱۰ همین کتاب نقل می‌شود. البته استفاده از جدول، ویژهٔ خوانندگان آن کتاب است، زیرا در جدول فقط شمارهٔ مثال ذکر شده است و شرح مثال در متن همان کتاب آمده است. وانگهی، در این صفحه فقط ۳۰ ویژگی نام برده شده و ۳۱ ویژگی دیگر در صفحهٔ دوم جدول به‌چشم می‌خورد. سپس، برای مثالهای ردیفهای بعد، جدول ادامه می‌یابد.

۲. مثال ۱۰۵ در جدول.ـم. ۳. مثال ۴۲ در جدول.ـم.

جدول مرجع کلی[1]

نام انگلیسی ویژگیها	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	شمارهٔ ردیف مثال در متن ← نام فارسی ویژگیها
T_0	۱	۱		o		o	۱	۱	۱	ت صفر T_0
T_1	o	o		o		o	۱	۱	۱	ت یک T_1
T_2	o	o		o		o	۱	۱	۱	ت دو T_2
$T_{2\frac{1}{2}}$	o	o		o		o	۱	۱	۱	ت دو ونیم $T_{2\frac{1}{2}}$
T_3	o	o		۱	۱	۱	۱	۱	۱	ت سه T_3
$T_{3\frac{1}{2}}$	o	o		۱		۱	۱	۱	۱	ت سه ونیم $T_{3\frac{1}{2}}$
T_4	o	o		۱		۱	۱	۱	۱	ت چهار T_4
T_5	o	o		۱		۱	۱	۱	۱	ت پنج T_5
URYSOHN	o	o		o		o	۱	۱	۱	اوریسون
SEMIREGULAR	o	o	o		o	o	۱	۱	۱	نیمه منظم
REGULAR	o	o		o		o	۱	۱	۱	منظم
COMPLETELY REGULAR	o	o		o		o	۱	۱	۱	کاملاً منظم
NORMAL	o	o		o		o	۱	۱	۱	نرمال
COMPLETELY NORMAL	o	o		o		o	۱	۱	۱	کاملاً نرمال
PERFECTLY NORMAL	o	o		o		o	۱	۱	۱	تماماً نرمال
COMPACT	o	۱		o		۱	o	o	۱	فشرده
σ-COMPACT	۱	۱		۱		۱	o	۱	۱	σ ـ فشرده
LINDELÖF	۱	۱		۱		۱	o	۱	۱	لیندلف
COUNTABLY COMPACT	۱	۱		۱		o	o	o	۱	فشردهٔ شمارا
SEQUENTIALLY COMPACT	o	۱		o		۱	o	o	۱	دنباله‌یی فشرده
WEAK COUNTABLY COMPACT	o	۱		۱		۱	o	o	۱	فشردهٔ شمارای ضعیف
PSEUDOCOMPACT	۱	۱		o		۱	o	o	۱	شبه فشرده
LOCALLY COMPACT	۱	۱		۱		۱	۱	۱	۱	موضعاً فشرده
STRONG LOCALLY COMPACT	o	۱		۱		۱	۱	۱	۱	موضعاً فشردهٔ قوی
σ-LOCALLY COMPACT	۱	۱		۱		۱	o	۱	۱	σ ـ موضعاً فشرده
SEPARABLE	۱	۱		۱		۱	o	۱	۱	تفکیک‌پذیر
SECOND COUNTABLE	۱	۱		۱		۱	o	۱	۱	شمارای دوم
FIRST COUNTABLE	۱	۱		۱		۱	۱	۱	۱	شمارای یکم
COUNTABLE CHAIN CONDITION	۱	۱		۱		۱	o	۱	۱	شرط زنجیری شمارا
PARACOMPACT	o	۱		۱		۱	۱	۱	۱	پیرافشرده

۱) ردیف ۵ مربوط به متن زیر کتاب است: هر تابع از یک مجموعهٔ X با توپولوژی گسسته، پیوسته است. لذا صادق بودن ویژگی در آن (ارزش ۱) یا نبودن (ارزش o) مورد ندارد. کلاً ۱۴ ردیف مشمول این قاعده‌اند و لذا فقط ۱۲۹ مثال در جدول ارزشیابی شده‌اند.

نام فارسی ویژگیها	نام انگلیسی ویژگیها
فرا فشرده	METACOMPACT
پیرافشردهٔ شمارا	COUNTABLY PARACOMPACT
فرافشردهٔ شمارا	COUNTABLY METACOMPACT
تماماً نرمال	FULLY NORMAL
تماماً ت ـ چهار	FULLY $T_۴$
همبند	CONNECTED
همبند ـ راه	PATH CONNECTED
همبندـکمان	ARC CONNECTED
ابر همبند	HYPER CONNECTED
فرا همبند	ULTRA CONNECTED
موضعاً همبند	LOCALLY CONNECTED
موضعاًهمبند ـ راه	LOCALLY PATH CONNECTED
موضعاً همبند ـ کمان	LOCALLY ARC CONNECTED
همبند دوگانه	BICONNECTED
نقاط پاشیده از هم دارد	HAS DISPERSION POINTS
کلاً ناهمبند ـ راه	TOTALLY PATH DISCONNECTED
کلاً ناهمبند	TOTALLY DISCONNECTED
کلاً جدا	TOTAOLLY SEPARATED
فرینه ناهمبند	EXTREMALLY DISCONNECTED
صفر ـ بعدی	ZERO DIMENSIONAL
پراکنده	SCATTERED
گسسته	DISCRETE
متریکپذیر	METRIZABLE
با پایهٔ σـموضعاً متناهی	σ-LOCALLY FINITE BASE
کامل از حیث توپولوژی	TOPOLOGICALLY COMPLETE
از رستهٔ دوم	SECOND CATEGORY
شمارا	COUNTABLE
توان کمتر از پیوستار C	CARD LESS THAN C
توان برابر پیوستار C	CARD=C
با توان نامتجاوز از ۲^C	CARD NOT EXCEEDING۲^C
قویاً همبند	STRONGLY CONNECTED

a، بینهایت بار نفوذ کند. وگرنه، باید هر نقطهٔ x یک همسایگی U_x داشته باشد به‌گونه‌ای که این دنباله را فقط در تعدادی متناهی از دفعات قطع کند. اما، از آنجا که $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$، سرانجام پیشروی دنباله در جایی متوقف می‌شود. اما اگر a یک پایهٔ همسایگی شمارا مانند $\{V_i\}_{i \geqslant 1}$ داشته باشد، آشکارا می‌توان یک زیر دنباله مانند $\{x_{n_k}\}_{k \geqslant 1}$ چنان انتخاب کرد که $x_{n_k} \in V_1 \cap \cdots \cap V_k$، و دیده می‌شود که این زیر دنباله، همگرا به aست. همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم. □

پیوست جهت استفادهٔ بیشتر خوانندگان، سایر ویژگیهای مندرج در جدول ص ۱۹۵ مرجع [۱۷] را نیز در صفحهٔ ۱۱۱ آورده‌ایم، ولی از ذکر ارزشهای ۱ و o مثالها خودداری می‌کنیم، زیرا برای خوانندگان خالی از فایده خواهد بود. ـ م.

گزارهٔ ۳. برای فضاهای متری، مفاهیم «فشرده» و «فشردهٔ دنباله‌یی» مترادف‌اند.

برهان. فرض کنیم X یک فضای متری فشردهٔ دنباله‌یی باشد و $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ پوششی باز برای آن، که زیرپوشش متناهی ندارد. می‌خواهیم به یک تناقض برسیم. برای هر $x \in X$، یک $\lambda(x)$ چنان انتخاب می‌کنیم که علاوه بر آنکه x عضو $U_{\lambda(x)}$ است، عملاً به معنی زیر در آن عمیقاً نشانیده شده باشد: یک گوی باز بزرگ به مرکز x و مشمول در $U_{\lambda(x)}$ بتوان در نظر گرفت به قسمی که شعاع آن r یکی از دو خصوصیت زیر را داشته باشد، یا بزرگتر از ۱ باشد و یا گوی به شعاع $2r$ حول x در هیچ یک از مجموعه‌های عضو این پوشش قرار نگیرد. روشن است که می‌توان چنین $\lambda(x)$ای برگزید.

اکنون یک دنبالهٔ $(x_n)_{n \geqslant 1}$ را به استقراء چنان انتخاب می‌کنیم که

$$x_{n+1} \notin U_{\lambda(x_1)} \cup \cdots \cup U_{\lambda(x_n)}$$

ملاحظه می‌شود که فاصلهٔ یک عضو دلخواه این دنباله، x_i، از هر یک از اعضای تالی آن، یا از ۱ بیشتر است و یا آن قدر بزرگ است که گوی باز به شعاع دو برابر این فاصله و مرکز x_i، در هیچ یک از مجموعه‌های عضو پوشش مفروض نمی‌گنجد. فرض کنیم a حد یک زیر دنبالهٔ این دنباله باشد و $1 > r > o$، به قسمی که $K_r(a) \subset U_{\lambda(a)}$. در این صورت، باید این زیر دنباله سرانجام در $K_{r/5}(a)$ بماند، و این هم ایجاب می‌کند که نقاط دنباله، بیش از آنکه روش ساختن آن اجازه می‌داد، به هم نزدیک شوند و دور هم گرد آیند، و این تناقض است، همان چیزی که می‌خواستیم. □

*

راجع به اصل موضوع اول شمارایی به همین بسنده می‌کنیم. ببینیم در چه مواردی با اصل موضوع دوم سروکار پیدا می‌کنیم؟ در جایی بسیار مهم، در تعریف «خمینه‌ها»[1] ، به شکل زیر: خمینهٔ توپولوژیک

1. manifolds

n بعدی، یک فضای هاوسدورف شمارای دوم موضعاً همسانریخت با $\mathbb{R}^n$ است. در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات، مثل توپولوژی دیفرانسیل، هندسهٔ ریمانی، گروههای لی، رویه‌های ریمان، و غیره، اشیاء مورد مطالعه، خمینه‌های توپولوژیک با ساختارهای اضافی هستند. و باز در برخی زمینه‌ها مثل فضاهای مختلط[1] ساختارهایی بررسی می‌شوند که به نحوی شبیه خمینه‌ها هستند، و باز هم می‌خواهند که این فضاها شمارای دوم باشند. (ص ۱۸ مرجع [۱۰] دیده شود). بنابراین، می‌توان گفت که این اصل موضوع دوم یکی از اصلهای موضوع بنیادی در بخش اعظم هندسهٔ جدید و توپولوژی است.

از تعریف تنهای خمینه، بلافاصله دیده نمی‌شود که از این اصل موضوع ما چه انتظاری داریم. اما اهمیت فنی آن را همین الآن روشن خواهیم کرد. در واقع، این اصل امکان می‌دهد که برای هر پوشش باز $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (و خصوصاً برای هر خانواده از همسایگیهای باز به شکل $\{U_x\}_{x\in X}$)، یک زیرپوشش شمارا بتوانیم پیدا کنیم، و این خود نیز در بسیاری از ساختمانهای استقرایی و برهانهایی که با شناخت موضعی (مانند همسانریختی موضعی با $\mathbb{R}^n$!) آغاز می‌شوند مفید است، و امکان می‌دهد از $U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_n}$ به $U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_n}\cup U_{x_{n+1}}$ برسیم. اما باید دانست که اصل موضوع دوم شمارایی فقط یک ابزار فنی نیست: چنانچه این اصل را کنار می‌گذاشتیم، قضایایی در توپولوژی دیفرانسیل، از قبیل قضیهٔ متریکپذیری خمینه‌ها، قضیهٔ نشاندن ویتنی[2]، قضیهٔ سارد[3] و غیره، دیگر مسلم نبودند و اعتبار خود را از دست می‌دادند.

البته، فضاهایی را که در اصل دوم شمارایی صدق نمی‌کنند ولی در سایر موارد شبیه خمینه‌ها هستند، نمی‌توان صرفاً به دلیل فوق کنار گذاشت. کسی چه می‌داند، شاید این‌گونه فضاها خیلی جالب باشند! ... اما به نظر نمی‌رسد که چنین باشد، هیچ دلیل قطعی برای مطالعهٔ این‌گونه «خمینه‌ها» در دست نیست.

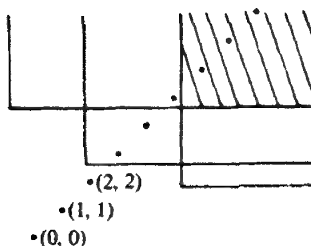
در خاتمهٔ این فصل، به موضوع تفکیکپذیری اشاره می‌کنم، که گاهی در توپولوژی مطرح می‌شود، و می‌توان آن را یک نوع «اصل موضوع سوم شمارایی» به شمار آورد.

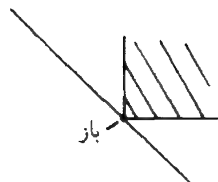
تعریف یک فضای توپولوژیک را تفکیکپذیر[4] گویند هرگاه شامل یک مجموعهٔ چگال شمارا باشد.

این ویژگی، با اصول اول و دوم شمارایی، ماهیتی متفاوت دارد، بدین معنی که زیرمجموعه‌ها این ویژگی را به ارث نمی‌برند. به‌عنوان مثال، مجموعهٔ $\mathbb{R}^2$ با توپولوژی حاصل از ربع صفحه‌های $(x,y)+\mathbb{R}^2_{++}$ را در نظر می‌گیریم. این فضا تفکیکپذیر است، زیرا مثلاً مجموعهٔ $\{(n,n)|n\in\mathbb{N}\}$ در این فضا

1. complex spaces 2. Whitney embedding theorem 3. Sard theorem
4. separable

چگال است. اما، از سوی دیگر، «قطر فرعی»[1] $x + y = o$ یک زیر فضای گسسته و ناشمارا، و لذا تفکیک‌ناپذیر است.



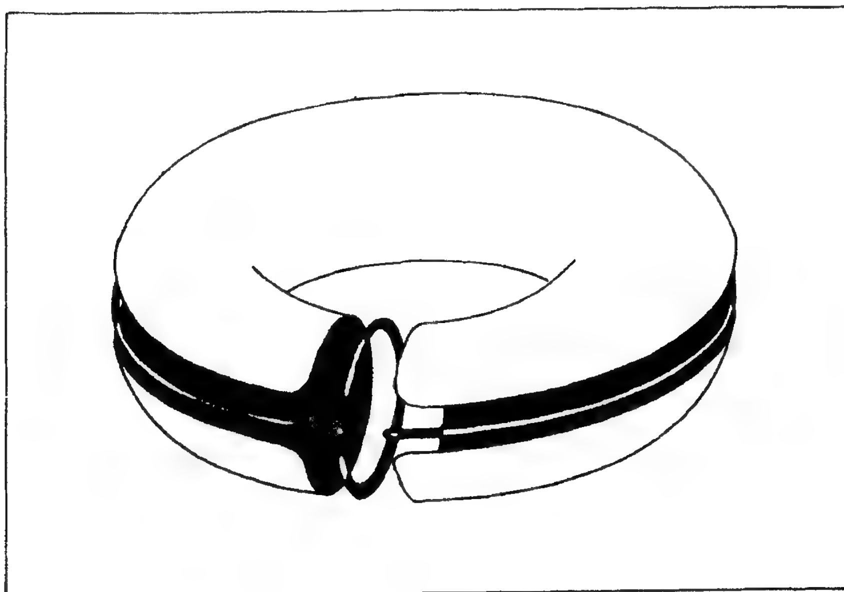


حالا شما خواهید گفت، بفرما، این مثال که یک مثال آسیب‌شناختی است. تصدیق می‌کنم! اما در فضاهای «مناسب»، مثلاً در فضاهای متری، می‌توان از مفهوم تفکیک‌پذیری صرف‌نظر کرد، زیرا فضاهای متری تفکیک‌پذیرند اگر و تنها اگر شمارای دوم باشند. در هر حال، شمارایی دوم مستلزم تفکیک‌پذیری است و برای فضاهای هیلبرت، تعریف فوق معادل با تعریفی است که قبلاً در مورد تفکیک‌پذیری آورده بودیم: وجود یک پایهٔ هیلبرتی شمارا.

1. antidiagonal

۷

مجتمعهای ضعیف ـ توپولوژیِ متناهی ـ بستار (یا مجتمعهای CW)



۱. مجتمعهای سادکی

پیش از پرداختن به‌خود مجتمعهای ضعیف ـ توپولوژیِ متناهی ـ بستار، مایلم مطالبی دربارهٔ طلایه‌دارهای آنها، یعنی مجتمعهای سادکی [1] بیاورم. زبان توپولوژی نقطه ـ مجموعه به‌ما امکان

1. simplicial complexes

می‌دهد تا مسائل متعدّدی را که در آغاز به‌نظر ما خیلی پراکنده می‌رسند، به‌اختصار و هماهنگ با یکدیگر مطرح کنیم و آنها را تحت یک بیان شهودی مشترک ارائه دهیم. اما، راستش را بخواهید، باید بگوییم که، توپولوژی نقطه ـ مجموعه، در حل بعدی این‌گونه مسائل، سهم چندانی ندارد. روشهای حل تا حد زیادی، از توپولوژی جبری گرفته می‌شوند. این، نکته‌ای بود که از قبل خیلی زود به‌آن پی برده شده‌بود، و از همان ابتدای کار (یعنی تقریباً از اوایل سدهٔ بیستم)، یکی از تلاشهای عمده در توپولوژی، بسط دستگاه توپولوژی جبری بود. متون کلاسیک، نظیر کتاب درسی توپولوژی زایفرت ـ ترلفال[1] و یا کتاب توپولوژی آلکساندروف ـ هوپف جلد اول[2]، عمدتاً شامل توپولوژیِ جبری هستند و بخشبندی توپولوژی به‌توپولوژی «نقطه ـ مجموعه» و توپولوژی «جبری»، به‌عنوان شاخه‌هایی از توپولوژی، بعدها، پس از جنگ جهانی دوم، براثر ازدیاد حجم مطالب، صورت پذیرفته است.

در واقع می‌توان گفت که توپولوژی جبری با سادکها شروع می‌شود:

تعریف(سادک). منظور از یک سادک k ـ بعدی[3]، یا k ـ سادک[4] در $\mathbb{R}^n$، غلاف محدّب[5] $k+۱$ نقطه‌یی، $s(v_o,\dots,v_k)$، در وضعیت کلی است.

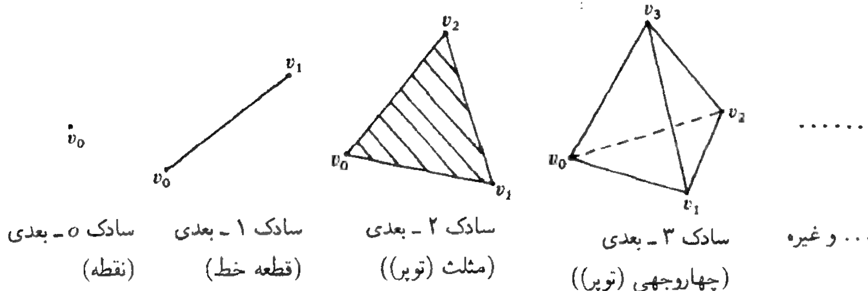
در این تعریف، غلاف محدّبِ نقاط $v_o,\dots,v_k$، مجموعهٔ

$$\left\{\sum_{i=o}^{k}\lambda_i v_i \mid \lambda_o+\cdots+\lambda_k=۱,\ \lambda_i\geqslant o\right\}$$

است و منظور از «وضعیت کلی» آن‌است که دستگاه

$$(v_۱-v_o,\dots,v_k-v_o)$$

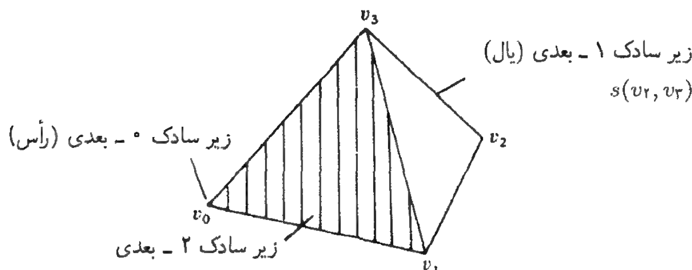
نابسته خطی[6] است.



سادک o ـ بعدی (نقطه) — سادک ۱ ـ بعدی (قطعه خط) — سادک ۲ ـ بعدی (مثلث (توپر)) — سادک ۳ ـ بعدی (چهاروجهی (توپر)) — ... و غیره

1. Seifert-Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*(1934)
2. Alexandroff-Hopf, *Topologie I*(1935)
3. k-dimensional simplex
4. k-simplex
5. convex hull
6. linearly independent

نامگذاری. غلاف محدب یک زیرمجموعه از $\{v_o, \ldots, v_k\}$ را یک زیرسادک[1] و یا یک وجهِ[2] $s(v_o, \ldots v_k)$ می‌نامند:



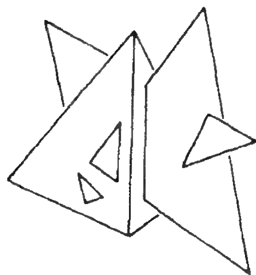
تعریف (مجتمع سادکی یا چند وجهی). یک مجموعهٔ K از سادکهای $\mathbb{R}^n$ را یک مجتمع سادکی یا یک چند وجهی[3] گویند هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

(i) وقتی K شامل یک سادک باشد، شامل همهٔ وجه‌های آن نیز باشد؛

(ii) اشتراک دو سادک عضو K یا تهی و یا یک وجه مشترک باشد؛

(iii) (در حالتی که K نامتناهی است)، K موضعاً متناهی باشد، بدین‌معنی که هر نقطهٔ $\mathbb{R}^n$، یک همسایگی داشته باشد که فقط تعدادی متناهی از سادکهای K را قطع کند.

بنابراین، سادکها نمی‌توانند بی‌قاعده و اتفاقی در هم فرو روند،

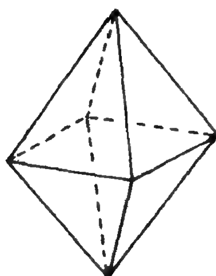


بلکه باید به‌دقّت با هم جفت و جور شوند. اینک چند مثال:

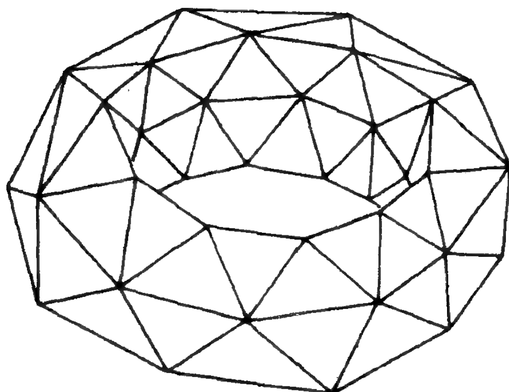
(۱) رویهٔ هشت وجهی[4] : این چند وجهی از هشت سادک ۲ بعدی (و وجوه آنها) تشکیل شده است. این مجتمع را می‌توان یک «صورت خاص سادکی» از کرهٔ دوبعدی دانست.

---

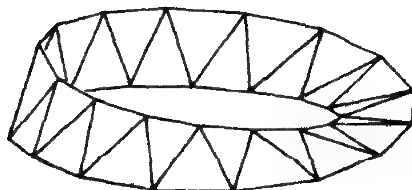
1. subsimplex 2. face 3. polyhedron 4. octahedral surface



(۲) یک « چنبرهٔ سادکی»[1] :

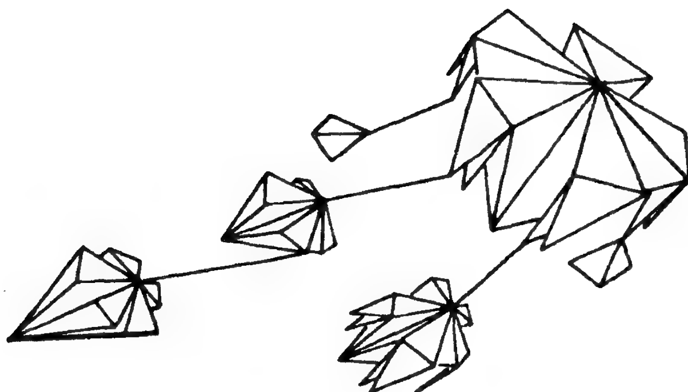


(۳) یک «نوار سادکی موبیوس» [2]

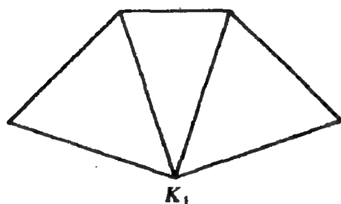


(۴) یک موجود سادکی، که از سه نوع سادک مثالهای قبل نیست، بلکه سادکهای تشکیل دهندهٔ آن می‌توانند به‌گونه‌ای کلیتر همدیگر را قطع کنند.

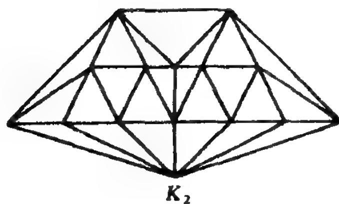
1. simplicial torus 2. simplicial Möbius strip



تعریف. زیر فضای $|K| := \bigcup_{s\in K} s$ از فضای $\mathbb{R}^n$ را فضای توپولوژیک زیربنایی مجتمع K می‌نامیم.



K_1



K_2

$|K_1| = |K_2|$, اما $K_1 \neq K_2$

هر چند اختلاف بین K و $|K|$ آشکار است، ولی شما به‌ما حق می‌دهید که در مورد این اختلاف خیلی ملاّنقطی نباشیم که در همهٔ احوال، چه در نمادگذاری و چه در واژه‌ها، روی اختلاف آنها تأکید کنیم: از این رو، گاهی، با تسامح، از مجتمع سادکی $K \subset \mathbb{R}^n$ صحبت می‌کنیم (درحالی‌که $|K|$ موردنظر است)، و لحظه‌ای بعد از سادکهای آن سخن می‌رانیم (که دراین‌حال، منظور K است). البته، موارد فراوانی وجود دارند که تمایز دقیق بین دو مفهوم جنبهٔ اساسی دارد. از جمله، موارد این فصل که از همین‌گونه‌اند.

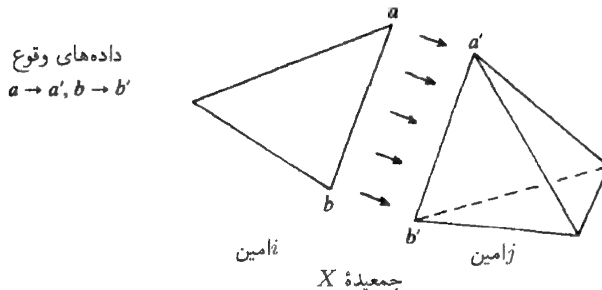
*

همین‌قدر توضیح برای مفهوم مجتمعهای سادکی کافی است. اما فایدهٔ آن چیست؟ از دیدگاه توپولوژی، مجتمعهای سادکی، به‌عنوان زیر فضاهای $\mathbb{R}^n$، فقط رده‌ای از فضاهای توپولوژیک را تشکیل

می‌دهند که ظاهراً حالت بسیار خاصی بیش نیستند. اما یک صفت ویژه در آنها هست: چنانچه در مورد یک مجتمع مفروض، بدانیم که تعداد سادکهای اساسی آن (یعنی آنهایی که وجوه سادکهای بزرگتری در K نیستند)، در هر بعد («اعداد سادکی»[1]) چقدر است، و هم‌چنین بدانیم در چه رأسها (در نتیجه در چه پهلو[2] هایی) این سادکها («سادکهای وقوع»[3]) مشترک هستند، در این صورت، فضای $|K|$ با تقریب همسانریختی معین می‌شود. ببینیم چگونه از این داده‌ها، یک فضای همسانریخت با $|K|$ می‌سازیم؟ برای این کار، به‌ازای هر بعد، یک سادک استانده، مثل $\Delta_k := s(e_1, \ldots, e_{k+1})$ با بردارهای یکه در $\mathbb{R}^{k+1}$ به‌عنوان رؤوس، در نظر می‌گیریم، سپس حاصلجمعهای نسخه‌های جدا از هم سادکهای استانده را، به‌تعدادی که اعداد سادکی تعیین می‌کنند، تشکیل می‌دهیم:

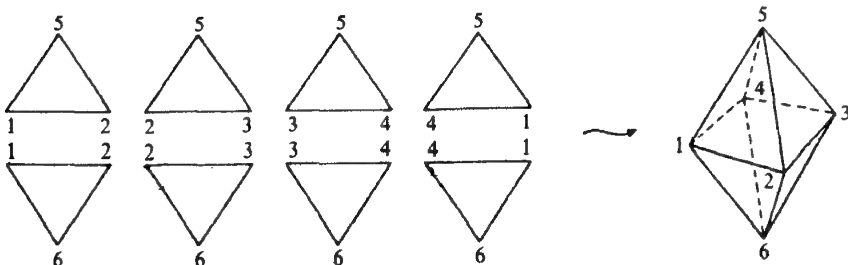
$$X = (\Delta_o + \cdots + \Delta_o) + \cdots + (\Delta_n + \cdots + \Delta_n)$$

و سرانجام، پهلوهای متناظر را با استفاده از داده‌های وقوع، با هم یکی می‌گیریم.



اکنون یک نگاشت دوسویی پیوسته از فضای خارج‌قسمت $X/\sim$ (که فشرده است) به‌فضای هاوسدورف $|K|$ داریم، که الزاماً یک همسانریختی است.

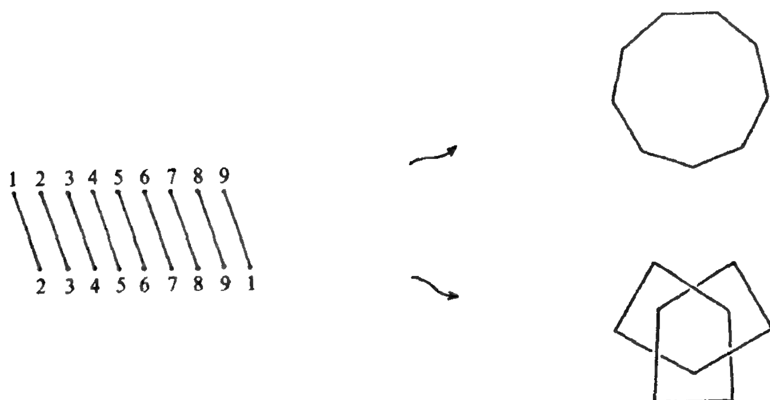
مثال. ساختن یک هشت وجهی از هشت سادک ۲ بعدی:



روشن است که اعداد و وقوعهای سادکی، اطلاعاتی بیشتر از نوع همسانریختی فضای $|K|$ به‌ما

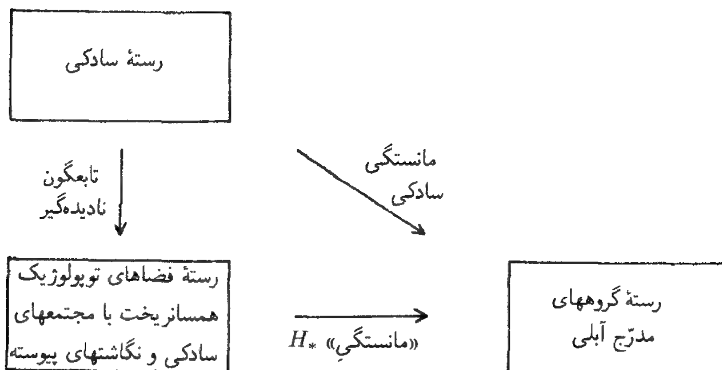
1. simplex numbers 2. side 3. simplex incidences

می‌دهند؛ با تقریب یک همسانریختی که سادکها را به‌طور آفین به سادکها تبدیل می‌کند، فضای $|K|$ را می‌شناسیم. اما بیش از این، هیچ‌چیز به‌ما نمی‌گویند، و همان‌طور که در مثال زیر دیده می‌شود، خصوصاً، فقط به‌اتکای اعداد و وقوعهای سادکی، نمی‌توان موقعیت $|K|$ را در فضا، حتی «از لحاظ ماهیت»، تثبیت کرد:



حال به‌مطلب اصلی خود باز می‌گردیم. اگر به‌جای یک فضای توپولوژیک، یک فضای مجتمع سادکی همسانریخت با آن فضا بگذاریم، اعداد و وقوعهای سادکی این مجتمع، هنوز ناورداهای توپولوژیک برای آن فضا نیستند، اما با اطمینان می‌توانیم بگوییم که همهٔ ناورداهای توپولوژیک را می‌توان به‌کمک این داده‌ها محاسبه کرد. زیرا این داده‌ها برای بازسازی فضای اصلی با تقریب همسانریختی کفایت می‌کنند. همین نکته، می‌توان گفت، نقطهٔ آغاز توپولوژی جبری بوده، و در طول چندین دهه، همهٔ تلاشها در مسیری که این مطلب نشان می‌داده، هدایت شده‌اند. آنچه دست آخر از این تلاشها سر برآورده، به‌زبان امروزی، نخستین تابعگون مهم توپولوژی جبری، یعنی تابعگون مانستگی سادکی[1] بوده است. از لحاظ ساختمان، این تابعگون، تابعگونی است هموردا مانند $H_* = (H_\circ, H_1, \dots)$، از رستهٔ مجتمعهای سادکی و نگاشتهای سادکی[2] (نگاشتهایی که سادکهای k ـ بعدی را به‌طور آفین به سادکهای k' ـ بعدی، $k' \leqslant k$، می‌برند)، یا «رستهٔ سادکی»،[3] به رستهٔ گروههای مدرّج آبلی[4]. عامل تعیین کننده در این میان، قضایای ناوردایی هستند که ایجاب می‌کنند که H_* معرف تابعگونی باشد (که این نیز با H_* نموده می‌شود) از رستهٔ فضاهای توپولوژیک، همسانریخت با مجتمعهای سادکی و نگاشتهای پیوسته به رستهٔ گروههای مدرّج آبلی:

1. simplicial homology 2. simplicial maps 3. simplicial category
4. category of graded abelian groups



باید دانست که، هر چند مانستگی سادکی مدتها پیش از قضایای ناوردایی وجود داشته است، اما نباید گمان کرد که «ناوردایی» عارضه‌ای است که براثر «حُسن تصادف»، مانستگی سادکی را ابزاری مفید برای توپولوژی ساخته است. روشن است که آفرینندگان مانستگی سادکی، شهودی هندسی برای این موضوع داشته‌اند، و از همان آغازکار، ناوردایی توپولوژیک را مدنظر داشته‌اند.

آری، در آغاز چنین بوده است. امروزه، تابعگونهای بیشتری افزوده شده‌اند و حتی خود مانستگی نیز پیشرفت بیشتری نموده است و با عبارات دقیقتری نیز بیان می‌شود. («محاسبهٔ مانستگی به‌کمک زنجیرهای سادکی مانند محاسبهٔ انتگرالهای $\int_a^b f(x)dx$ به‌کمک تقریب زدن مجموعهای ریمانی است»، نقل از ص ۱۱۹، کتاب درسهایی در توپولوژی جبری، تألیف آ.دولد، چاپ ۱۹۷۲، مرجع [۵]).اما ساختن یک فضا با بلوکهای ساختمانی ساده، امروزه هم مانند گذشته، بسیار مفید است، با این تفاوت که معمولاً، به‌جای استفاده از مجتمعهای سادکی، امروزه از مجتمعهای ضعیف ـ توپولوژیِ متناهی ـ بستار استفاده می‌کنند، که خود آنها نیز یک نوع «نسل دوم چند وجهیها» تلقی می‌شوند و بسیار انعطاف‌پذیرتر و عملیترند. این موضوع که مجتمعهای ضعیف ـ توپولوژی متناهی ـ بستار چه هستند، و ویژگیهای اساسی آنها چیست، و از چه نظر بر مجتمعهای سادکی مزیت دارند، و به چه دلیل فقط پس از مجتمعهای سادکی توانسته‌اند ابداع شوند، موضوعی است که در بخشهای آتی به‌آنها خواهیم پرداخت.

۲. تجزیه‌های حجره‌یی

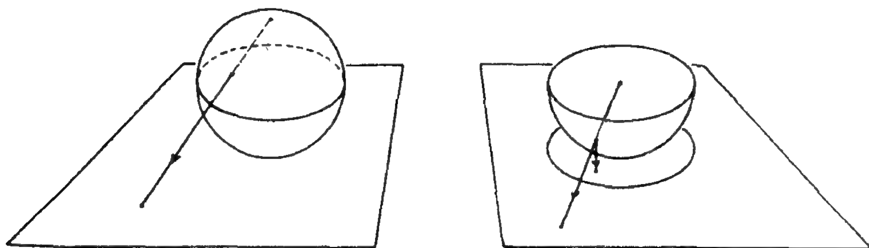
یادآوری می‌کنیم که افراز[1] یک مجموعهٔ X مجموعه‌ای است از زیر مجموعه‌های ناتهی X، دو به‌دو جدا از هم، که اجتماعشان برابر تمامی X است. بنابراین، هر عضو X در یکی و تنها در یکی از چنین زیر مجموعه‌ها قرار دارد. یک فضای توپولوژیک را یک n ـ حجره[2] نامیم هرگاه با $\mathbb{R}^n$ همسانریخت

1. partition 2. n-cell

باشد. یک تجزیهٔ حجره‌یی[1] برای فضای توپولوژیک X، یک افراز X است به زیر فضاهایی که هرکدام یک حجره هستند.

یک فضا با یک تجزیهٔ حجره‌یی $(X, \mathscr{E})$ را یک مجتمع CW یا مجتمع ضعیف ـ توپولوژی متناهی ـ بستار می‌نامیم هرگاه در اصول موضوعه‌ای چند صدق کند. این اصول را در بند آتی رسماً نام خواهم برد. اما اول بگذارید با حجره‌ها و تجزیه‌های حجره‌یی آشنا شویم.

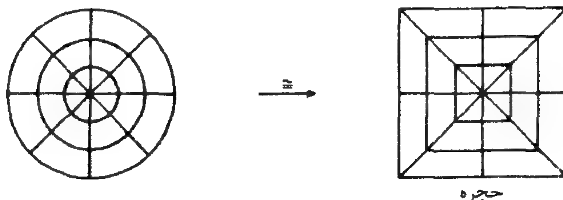
از آنجا که $\mathbb{R}^o$ فقط یک نقطه دارد، o ـ حجره‌ها دقیقاً فضاهای یک نقطه‌یی هستند. گوی‌باز $\mathring{D}$ و کرهٔ سودهٔ[2] $S^n \backslash pt$ (کره منهای یک نقطه)، همان‌طورکه همه می‌دانیم، همسانریخت با $\mathbb{R}^n$ و در نتیجه n ـ حجره هستند و (همسانریختی $S^n \backslash pt \overset{\cong}{\to} \mathbb{R}^n$ از راه تصویرگنجنگاشتی[3] برقرار می‌شود، و همسانریختیهای $\mathbb{R}^n \overset{\cong}{\leftarrow} S^n_- \overset{\cong}{\to} \mathring{D}^n$ از راه تصویر مرکزی و قائم).



به‌کمک یک تابع پیوستهٔ مثبت $r : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ به‌عنوان «عامل کشش»، یک همسانریختی از $\mathbb{R}^n$ بروی خودش حاصل می‌شود که ضابطه‌های آن $o \mapsto o$ و

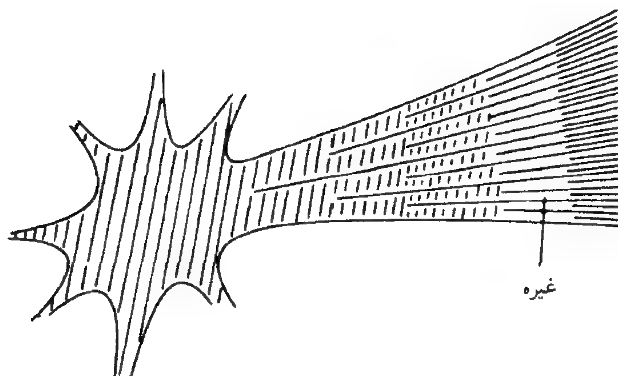
$$x \mapsto r\left(\frac{x}{||x||}\right).x$$

هستند. به‌ویژه، این همسانریختی، چنانکه در شکل دیده می‌شود، D^n را بروی یک n ـ حجره می‌برد:



این شیوه، شیوهٔ ساده‌ای است که حجره‌های فراوانی برای ما فراهم می‌سازد. درواقع، حتی می‌توان گفت که هر زیر مجموعهٔ باز ستاره‌یی شکل در $\mathbb{R}^n$، یک n ـ حجره است؛ بهترین راه برای مشاهدهٔ این امر، آن‌است که شارش[4] یک میدان برداری شعاعی مناسب را در نظر بگیریم.

1. cell decomposition 2. punctured sphere 3. stereographic projection
4. flow



این یادآوری فقط یک یادآوری حاشیه‌یی بود، و در حال حاضر نبایستی توجه شما را به‌چنین چیزهای شگفت‌انگیزی معطوف کنم، زیرا هر چندِ یک حجره همواره یک حجره است، اما نحوهٔ قرارگرفتن حجرهٔ این مثال در $\mathbb{R}^۲$، قطعاً نمونهٔ نوعی نحوهٔ خاص و مطلوبِ قرارگرفتن حجره‌ها در مجتمعهای CW نیست.

مهمتر از همه، این پرسش است که آیا یک n ـ حجره می‌تواند در عین حال یک m ـ حجره، به‌ازای $n \neq m$ باشد؟ باید فوراً بگویم که جواب منفی است. برای $n \neq m$، $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$. این مطلب را نخست ل. ا. ی. براوئر[1] در ۱۹۱۱ ثابت کرد، و برهان آن ساده نیست. فقط دو حالت آن بدیهی هستند: $\mathbb{R}^۰$ و $\mathbb{R}^۱$ با هیچ یک از فضاهای با بعدِ بیشتر $\mathbb{R}^n$ همسانریخت نیستند ($\mathbb{R}^۱$ یگانه فضای $\mathbb{R}^n$ای است که می‌تواند با برداشتن یک نقطهٔ تنها ناهمبند شود). با وجود این، اگر مجاز باشیم اندکی توپولوژی جبری به‌کار بریم، اثبات قضیهٔ براوئر ساده می‌شود: اگر $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$، آنگاه

$$\mathbb{R}^n \backslash o \cong \mathbb{R}^m \backslash o$$

از این رو

$$S^{n-۱} \simeq \mathbb{R}^n \backslash o \cong \mathbb{R}^m \backslash o \simeq S^{m-۱}$$

و بنابر ناوردایی مانسته جاییِ مانستگی، خواهیم داشت

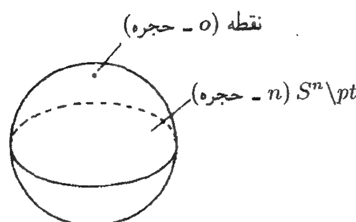
$$H_{n-۱}(S^{n-۱}) \cong H_{n-۱}(S^{m-۱})$$

اما می‌دانیم $H_k(S^i) \cong \mathbb{Z}$ برای $i = k > o$، و $H_k(S^i) = o$ برای $i \neq k > o$. لذا $n = m$، همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. وانگهی، این برهان واقعاً یک برهان «درست» است، زیرا در

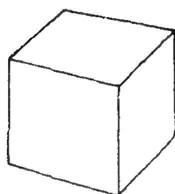
1. Luitze Egbertus Jan Brouwer

استخراج ابزارهای مانستگی، هیچگاه از قضیهٔ براوئر استفاده نشده است. لذا، می‌توانیم از بُعدِ یک حجره صحبت کنیم.

آنچه که راجع به حجره‌ها به‌عنوان موجوداتی منفرد گفتیم، کافی است. اکنون به‌جستجوی مثالهایی از تجزیهٔ حجره‌یی می‌پردازیم. هر مجتمع سادکی K، به‌گونه‌ای متعارف، معّرف یک تجزیهٔ حجره‌یی $|K|$ به‌شرحِ زیر است: اجتماع کلیهٔ وجوه سرهٔ یک سادک s را مرز آن می‌نامند و با نماد ∂s نشان می‌دهند و $s\backslash\partial s$ را «سادکِ باز» وابسته به s می‌نامند. سادکهای باز، حجره هستند و اجتماع کلیهٔ سادکهایِ بازِ یک مجتمع سادکی K، یک تجزیهٔ حجره‌یی برای $|K|$ درست می‌کنند. دو مثال دیگر در شکلهای زیر دیده می‌شود:



$X = S^n$، که به دو حجره تجزیه شده است



X رویهٔ مکعب است، که به‌طور متعارف به هشت حجرهٔ o ـ بُعدی، دوازده حجرهٔ ۱ ـ بُعدی، و شش حجرهٔ ۲ ـ بُعدی تجزیه شده است.

مثالهای فوق مثالهای خیلی خوشرفتارند. چنانچه اصول موضوعه مانع نبودند، می‌توانستیم یک فضا را با انتخابِ، مثلاً حجره‌هایی دو به‌دو جدا از هم واقع در آن، (مثلاً در «ستارهٔ» صفحهٔ پیش) تجزیه کنیم، و بقیهٔ نقاط هم به‌عنوان o ـ حجره‌های این تجزیه، تعریف می‌شدند. اما با تجزیه‌هایی از این قبیل هیچ‌گونه کار معقولی را نمی‌توان شروع کرد، و به‌همین دلیل اکنون به «اصول موضوعهٔ مجتمعهای CW یا مجتمعهای ضعیف ـ توپولوژیِ متناهی ـ بستار» باز می‌گردیم.

۳. مفهوم مجتمع ضعیف ـ توپولوژیِ متناهی ـ بستار

تعریف (مجتمع ضعیف ـ توپولوژی متناهی ـ بستار). یک زوج $(X, \mathscr{E})$ متشکل از یک فضای هاوسدورف X و یک تجزیهٔ حجره‌یی $\mathscr{E}$ از X، یک مجتمع ضعیف ـ توپولوژی متناهی ـ بستار[1] (یا مجتمع CW) نامیده می‌شود هرگاه در سه اصل موضوع زیر صدق کند:

اصل موضوع ۱ («نگاشتهای مشخصه»[2]). برای هر n ـ حجرهٔ $e \in \mathscr{E}$، یک نگاشت پیوستهٔ $\Phi_e : D^n \to X$ وجود دارد که گوی باز $\mathring{D}^n$ را به‌طور همسانریخت روی حجرهٔ e، و S^{n-1} را بتوی

1. *CW-complex* 2. characteristic maps

اجتماع حجره‌های با بعد حداکثر برابر $n - ۱$ می‌نگارد.

اصل موضوع ۲ («تناهی بستار»[1]). بستار هر حجرهٔ $e \in \mathscr{E}$، یعنی $\overline{e}$، فقط تعدادی متناهی از سایر حجره‌ها را قطع می‌کند.

اصل موضوع ۳ («توپولوژی ضعیف»[2]). یک زیر مجموعهٔ $A \subset X$ بسته است، اگر و تنها اگر، برای هر $e \in \mathscr{E}$، $A \cap \overline{e}$ بسته باشد.

این مفهوم در ۱۹۴۹ توسط ج. هـ. ک. وایتهد[3] آورده شد و نام cw از اصول ۲ و ۳ اخذ شده است، که C حرف اول «closure finiteness» و W حرف اول «weak topology» است. این دو اصل، شرایطی را تعیین می‌کنند که تحت آنها بینهایت حجره می‌توانند در مجتمع باشند (در مورد تجزیه‌هایی با تعداد متناهی حجره، این دو اصل خودبه‌خود همواره صدق می‌کنند).

برای سادگی بیان، از این به‌بعد به‌جای اصطلاح «ضعیف ـ توپولوژی، متناهی ـ بستار»، نماد اختصاری «ضَتمَب» را به‌کار می‌بریم.

تعریف. اگر X فضایی تجزیه شده به‌حجره‌ها باشد، X^n معرف اجتماع حجره‌هایی است با بُعد نابیشتر از n که آن‌را n ـ کالبدِ[4] X می‌نامند.

اصل ۱ (در مورد وجود نگاشتهای مشخصه) تقریباً می‌گوید که باید n ـ حجره‌ها «چسبیده» به $(n-۱)$ ـ کالبد تلقی شوند. بعداً، در بخش ۵، این حکم را دقیقتر بیان خواهیم کرد. پیش از این‌که مثالهایی برای روشن ساختن سه‌اصل فوق بیاورم، مایلم دو نتیجهٔ بلافصل اصل ۱ را، که باید بی‌درنگ پس از تعریف در شهود شما راجع به مجتمعهای ضَتمَب جای بگیرد ذکر کنم. به‌عنوان نمونه، هر مجتمع ضَتمَبِ ناتهی، باید دست‌کم یک o ـ حجره داشته باشد، زیرا اگر $n > o$ کوچکترین بُعد یک حجره باشد، آنگاه $S^{n-۱}(\neq \varnothing)$ نمی‌تواند در $X^{n-۱} \neq \varnothing$ گرفته شود. همچنین بلافاصله نتیجه می‌شود که هر مجتمع ضَتمَبِ متناهی، فشرده است، زیرا اجتماع متناهی از زیر فضاهای فشردهٔ $\Phi_e(D^n)$، $e \in \mathscr{E}$، است. حتی واقعاً درست است که بگوییم بستار هر حجره، فشرده است. دقیقتر بگوییم:

گزاره. اگر یک تجزیهٔ حجره‌یی یک فضای هاوسدورف X در اصل موضوع ۱ صدق کند، آنگاه برای هر n ـ حجرهٔ e، داریم $\overline{e} = \Phi_e(D^n)$ و به‌ویژه، بستار $\overline{e}$ فشرده است و «مرز حجره‌یی» آن $\overline{e} \backslash e = \Phi_e(S^{n-۱})$، در $(n-۱)$ ـ کالبد قرار دارد.

برهان. در حالت کلی، برای نگاشتهای پیوسته داریم $f(\bar{B}) \subset \overline{f(B)}$. بنابراین،

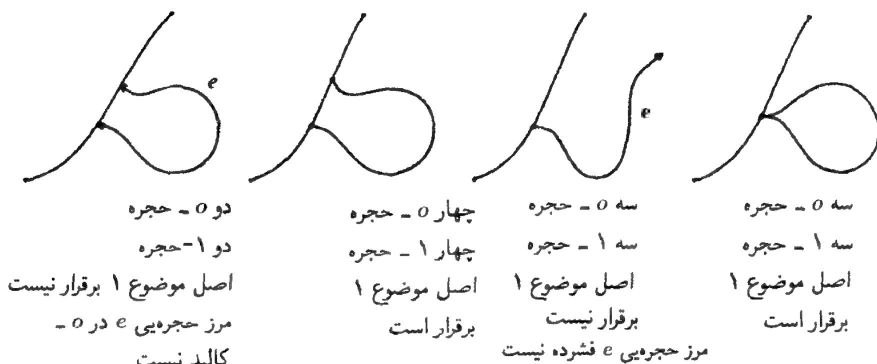
1. closure finiteness 2. weak topology
3. John Henry Constantine Whitehead 4. *n-skeleton*

$e \subset \Phi_e(D^n) \subset \overline{\Phi_e(\mathring{D}^n)} = \overline{e}$. چون یک زیر فضای فشرده از یک فضای هاوسدورف است، $\Phi_e(D^n)$ باید بسته باشد، لذا برابر $\overline{e}$ خواهد بود، زیرا بین e و $\overline{e}$ قرار دارد. همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم. □

اکنون، با توجه به‌اصول موضوعه، نگاهی به‌چند مثال از تجزیهٔ حجره‌یی فضاهای هاوسدورف می‌اندازیم:

نخست برخی از تجزیه‌های متناهی که اصول موضوعهٔ ۲ و ۳ خودبه‌خود در آنها برقرارند.

مثال ۱.



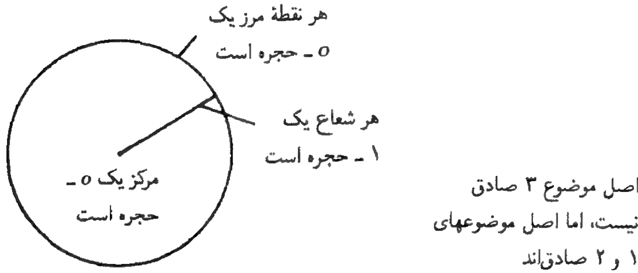
مثال ۲. در تجزیهٔ شکل زیر به سه حجرهٔ o ـ بعدی و دو حجرهٔ ۱ـ بعدی، اصل ۱ صادق نیست، زیرا مرز حجره‌یی e در o ـ کالبد نیست. اتفاقاً، این مثال را نمی‌توان با تجزیهٔ دیگری «تثبیت کرد»: این فضا تجربه‌پذیرِ ضَتمُبی نیست.



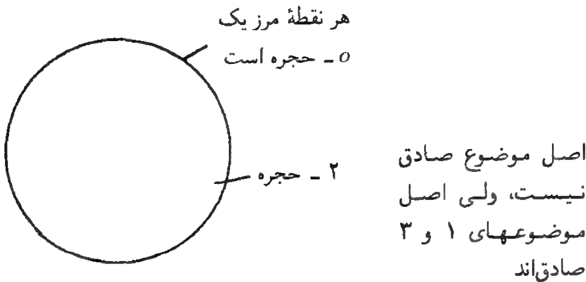
مثال ۳. تجزیهٔ‌مکعب وکره که درآخر بند پیش ملاحظه شد، تجزیه‌های ضتمب هستند.

اکنون دو مثال می‌آوریم که نشان می‌دهند اصلهای ۲ و ۳ مستقل از یکدیگرند.

مثال ۴. هر نقطهٔ مرز، یک o ـ حجره است، مرکز یک o ـ حجره است، و هر شعاع یک ۱ـ حجره است. اصل ۳ صادق نیست اما اصول ۱ و ۲ صادق‌اند.



مثال ۵. هر نقطهٔ دایرهٔ مرز یک o ـ حجره، و قرص باز یک ۲ ـ حجره است، اصل ۲ صادق نیست، اما اصول ۱ و ۳ صادق‌اند.



مثال ۶. تجزیهٔ یک مجتمع سادکی به سادکهای باز، یک تجزیهٔ ضَثمُبْ است.

۴. زیر مجتمعها

تعریف و لم (زیرمجتمعها). فرض کنیم $(X, \mathscr{E})$ یک مجتمع ضَثمُبْ، $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$ مجموعه‌ای از حجره‌های آن و $X' = \cup_{e \in \mathscr{E}'} e$ اجتماع آنها باشد. در این صورت، $(X', \mathscr{E}')$ را یک زیرمجتمعِ[1] $(X, \mathscr{E})$ می‌نامیم هرگاه یکی از سه شرط هم ارز زیر برقرار باشد:

(الف) $(X', \mathscr{E}')$ نیز یک مجتمع ضَثمُبْ باشد؛

(ب) X' در X بسته باشد؛

(پ) برای هر $e \in \mathscr{E}'$، $\overline{e} \subset X'$.

برهان هم‌ارزی این سه‌شرط. (پ) $\Rightarrow$ (ب) پیش پاافتاده است.

(ب) $\Rightarrow$ (پ). باید نشان دهیم که برای هر $e \in \mathscr{E}$، $\overline{e} \cap X'$ بسته است. از آنجاکه X بستار متناهی است، داریم $\overline{e} \cap X' = \overline{e} \cap (e'_1 \cup \ldots \cup e'_r)$ که بنابر (پ)، مساوی است با $\overline{e} \cap (\overline{e}'_1 \cup \ldots \cup \overline{e}'_r)$ و در نتیجه بسته است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(پ) $\Rightarrow$ (الف). هر نگاشت مشخصهٔ Φ_e نسبت به $(X', \mathscr{E}')$ به‌ازای $e \in \mathscr{E}'$، نسبت به $(X, \mathscr{E})$

1. subcomplex

نیز نگاشت مشخصه خواهد بود، لذا تذکر پیش ازگزاره بخش ۳ ایجاب می‌کند $\Phi_e(D^n)$، یعنی بستار e در X، (که البته منظور ما در (پ) است)، در زیر فضای X' نیز بستار e باشد، و در نتیجه درهمین زیر فضا قرار خواهد داشت، چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(الف) $\Leftarrow$ (ب و پ). بنابر (پ)، به‌ازای $e \in \mathscr{E}'$ هر نگاشت مشخصه نسبت به X، نسبت به X' نیز نگاشت مشخصه است. از طرف دیگر، X' آشکارا متناهی ـ بستار است. لذا $(X', \mathscr{E}')$ در اصول موضوعهٔ ۱ و ۲ صدق می‌کند. هنوز باید نشان دهیم که اگر $A \subset X'$، و به‌ازای هر $e \in \mathscr{E}'$، $A \cap \bar{e}$ در X' بسته باشد، آنگاه A در X' بسته است. اما (ب) ایجاب می‌کند که «بسته بودن در X» با «بسته بودن در X'» یکی باشد. پس، فقط کافی است ثابت کنیم که $A \cap \bar{e}$ برای $e \in \mathscr{E}\backslash\mathscr{E}'$ نیز بسته است. بنابر تناهی بستار X، داریم $A \cap \bar{e} = A \cap (e'_1 \cup \ldots \cup e'_r) \cap \bar{e}$، که می‌توان e'_iها را در $\mathscr{E}'$ گرفت، زیرا حجره‌های عضو $\mathscr{E}\backslash\mathscr{E}'$ نمی‌توانند در اشتراک با $A \subset X'$ سهیم باشند. پس، به‌دست می‌آوریم:

$$A \cap \bar{e} = A \cap (\bar{e}'_1 \cup \ldots \cup \bar{e}'_r) \cap \bar{e}$$

اما، بنابر فرض $A \cap (\bar{e}'_1 \cup \ldots \cup \bar{e}'_r)$ بسته است، و در نتیجه $A \cap \bar{e}$ نیز بسته است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

بجاست بگوییم که هر آنچه در مورد زیر مجتمعها لازم داریم بدانیم، بلافاصله از این لم، که به‌حافظه سپردن آن آسان است نتیجه می‌شود. ذیلاً، به‌عنوان نمونه، تعدادی از این نتایج را می‌آوریم:

چند نتیجه

(۱) اشتراکهای دلخواه زیر مجتمعها (با استفاده از (ب)) واجتماعهای دلخواه آنها (با استفاده از (پ))، زیر مجتمع هستند.

(۲) کالبدها زیر مجتمع‌اند (بااستفاده از (پ) وگزارهٔ بخش ۳).

(۳) هر اجتماع n ـ حجره‌ها در $\mathscr{E}$، با X^{n-1} تشکیل یک زیر مجتمع می‌دهند (به‌همان دلیل که در (۲) گفته شد).

(۴) هر حجره دریک زیر مجتمع متناهی قرار دارد (با استقراء روی بعدِ حجره: با استفاده از تناهی بستار وگزارهٔ بخش ۳).

یک نتیجهٔ پنجم نیز هست که آن‌را جداگانه به‌صورت فرع در ذیل می‌آوریم زیرا به‌توجه بیشتری نیازمند است:

فرع. هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ یک مجتمع ضَشُب، دریک زیر مجتمع متناهی قرار دارد. به‌ویژه،

یک مجتمع ضَثمُبْ فشرده است اگر و تنها اگر متناهی باشد.

برهان. با استفاده از نتیجه‌های (۱) و (۲) کافی است ثابت کنیم که زیر مجموعهٔ فشردهٔ $A \subset X$ فقط تعدادی متناهی از حجره‌ها را قطع می‌کند. برای این کار، در هر حجره‌ای که A را قطع می‌کند، یک نقطه انتخاب می‌کنیم، و مجموعهٔ این نقاط را P نامیده ثابت می‌کنیم که P بسته است. زیرا از تناهی بستار لازم می‌آید که $P \cap \bar{e}$ متناهی باشد و ما در یک فضای هاوسدورف باشیم. امّا این استدلال برای هر زیر مجموعهٔ P نیز درست است! پس P دارای توپولوژی گسسته است، امّا به‌عنوان زیر مجموعه‌ای بسته از یک فضای فشردهٔ A، باید خودش نیز فشرده، و در نتیجه متناهی باشد. چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

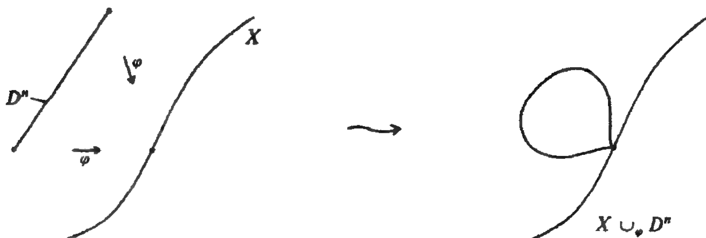
۵. حجره چسبانی

در آنچه گذشت، از مجتمعهای ضَثمُبْ به‌عنوان اشیاء موجودی که باید خواص آنها را بررسی کنیم، سخن راندیم، اکنون می‌خواهیم مهمترین روش ساختن مجتمعهای ضَثمُبْ را نشان دهیم. تجسّم آن، با توجّه به‌آنکه این روش اساساً همان حجره چسبانی است که قبلاً در فصل ۳، بخش ۷، مثال ۱، مورد بحث قرار دادیم، آسان است. این روش نه‌تنها از جنبهٔ عملی، بلکه از لحاظ بنیادی هم حائز اهمیت است، زیرا هر مجتمع ضَثمُبْ، با تقریب همسانریختیهایی که حافظ حجره‌اند، به‌همین شیوه نمایش داده می‌شود، ولذا بدین طریق، به یک نوع درک کلی ازمجتمعهای ضَثمُبِ ممکن دست می‌یابیم. برهان را نمی‌آورم، امّا برهان آن مشکل نیست و به‌هیچ نکته‌ای که در این کتاب با آن سروکار نداشته باشیم بستگی ندارد (رجوع کنید به فصل ۳ بخشهای ۱ تا ۳ و ۷).

اگر X یک مجتمع ضَثمُبْ باشد و $\varphi : S^{n-1} \to X^{n-1}$ یک نگاشت پیوسته به $(n-1)$ ـ کالبد مجتمع، آنگاه $X \cup_\varphi D^n$ نیز، به‌گونه‌ای متعارف، یک مجتمع ضَثمُبْ با یک حجرهٔ اضافی است. نگاشت متعارفِ

$$D^n \subset X + D^n \to X \cup_\varphi D^n$$

یک نگاشت مشخصه است. مرز حجره‌یِ حجرهٔ جدید، $\varphi(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$ است. باید به‌خاطر سپرد که این مرزِ حجره‌یی الزاماً نگارهٔ همسانریخت کره نیست، بلکه فقط یک نگارهٔ پیوسته است.

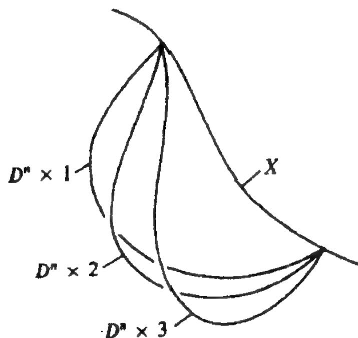


به‌همین قیاس، می‌توان همهٔ n ـ حجره‌های یک خانواده از n ـ حجره‌ها را به‌طور همزمان چسبانید: گیریم $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از نگاشتهای پیوستهٔ $\varphi_\lambda : S^{n-1} \to X^{n-1}$ باشد و همهٔ آنها را با هم در یک نگاشت پیوستهٔ تنهای

$$\varphi : S^{n-1} \times \Lambda \to X^{n-1}$$

$$(v, \lambda) \mapsto \varphi_\lambda(v)$$

گرد هم بنهیم که در اینجا توپولوژی Λ راگسسته گرفته‌ایم. دراین صورت $X \cup_\varphi (D^n \times \Lambda)$ نیز، به‌طریق متعارف، یک مجتمع ضتمب خواهد بود، که از X با «چسباندن یک خانواده از n ـ حجره‌ها» ساخته شده است. باید توجه کرد که به‌هیچ وجه لازم نیست که مرز حجره‌های جدید جدا از هم باشند:



اکنون می‌توانیم هر مجتمع ضتمب را با چسبانیدن پی در پی خانواده‌هایی از حجره‌ها، به‌دست آوریم: برای این کار، از کالبد مرتبهٔ o یعنی X° شروع می‌کنیم. این فضا فقط یک فضای گسسته است و اگر بخواهیم می‌توانیم چنین فکر کنیم که از چسبانیدن یک خانواده از o ـ حجره‌ها به‌فضای تهی، حاصل شده است. ببینیم چگونه X^n را از X^{n-1} به‌دست می‌آوریم؟ فرض کنیم $\mathscr{E}^n$ مجموعهٔ n ـ حجره‌ها باشد. به‌ازای هر n ـ حجرهٔ e، یک نگاشت مشخصهٔ Φ_e در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\varphi_e := \Phi_e|S^{n-1}$. حال اگر از $(\varphi_e)_{e\in\mathscr{E}^n}$ به‌عنوان خانوادهٔ نگاشتهای چسباننده استفاده کنیم، پس از چسباندن، به‌یک مجتمع ضَتْمُب $X^{n-1} \cup_\varphi (D^n \times \mathscr{E}^n)$ می‌رسیم، که به‌طور متعارف یک همسانریختی حافظ حجره بتوی X^n است.

بدین ترتیب، همهٔ کالبدها را با استقراء به‌دست می‌آوریم، و به ویژه خود X را اگر X متناهی ـ بعد باشد (یعنی هیچ حجره‌ای بالاتر از بعد معین نداشته باشد). از طرف دیگر، اگر، X نامتناهی‌ـبعد باشد آن‌را از کالبدهای

$$X^{\circ} \subset X^{1} \subset \dots$$

به‌صورت اجتماع $\bigcup_{n=o}^{\infty} X^n$، مجهز به «توپولوژی ضعیف»، که با اصل موضوع ۳ تشریح شد، به‌دست می‌آوریم.

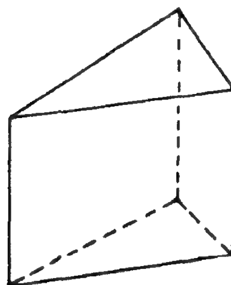
۶. چرا مجتمعهای ضَثمُب انعطافپذیرترند؟

اکنون به‌ذکر دیدگاههایی می‌پردازیم که به‌موجب آنها، مجتمعهای ضَثمُب، «خوشرفتارتر» یا «مناسبتر» از مجتمعهای سادکی هستند. بیاییم با حاصلضربهای دکارتی شروع کنیم. روشن است که حاصلضرب دو حجره، یک حجرۀ دیگر است و چنانچه $(X, \mathscr{E})$ و $(Y, \mathscr{F})$ تجزیه‌های حجره‌یی به‌ترتیب برای X و Y باشند، آنگاه $\{e \times e' | e \in \mathscr{E}, e' \in \mathscr{F}\}$ یک تجزیۀ حجره‌یی برای $X \times Y$ خواهد بود، و به‌آسانی ثابت می‌شود که حکم زیر در مورد چنین تجزیه‌هایی صادق است:

نکته. اگر X و Y مجتمعهای ضَثمُبِ متناهی باشند، $X \times Y$ نیز یک مجتمع ضَثمُبْ است.

توجه. (اثبات مطلب زیر را در اینجا نمی‌آوریم، ولی می‌توانید مثلاً به‌کتاب دُلد[1] مرجع [۵] ص ۹۹ مراجعه‌کنید). در مورد مجتمعهای نامتناهی ـ بعد، اتفاقاً ممکن است $X \times Y$ توپولوژی ضعیف نداشته باشد (اما اصول موضوعۀ ۱ و ۲ همواره صادق باشند). ولی تحت فرضهای اضافی خیلی سادۀ جزیی، مثلاً هنگامی‌که یکی از سازه‌های حاصلضرب موضعاً فشرده است، $X \times Y$ باز یک مجتمع ضثمب باشد.

لیکن، حاصلضرب دو سادکِ مثبت ـ بعد، دیگر یک سادک نیست:



به‌طوری که اگر بخواهیم حاصلضرب دو مجتمع سادکی را به یک مجتمع سادکی تبدیل کنیم، مجبوریم هر یک از سادکهای حاصلضرب را باز هم به‌اجزایی تقسیم کنیم.

*

1. Dold

در فصل ۳ بخش ۶، مثالهای متعددی از «فروریزی» یک زیر فضا به یک نقطه را بررسی کردیم. دقیقاً در توپولوژی جبری است که این عمل غالباً ظاهر می‌شود.[۱] در مورد مجتمعهای ضَثمُب، حکم زیر به‌سادگی اثبات می‌شود.

نکته. اگر X یک مجتمع ضَثمُب و $A \subset X$ یک زیر مجتمع باشد، آنگاه تجزیهٔ حجره‌یی X/A به o ـ حجرهٔ A و حجره‌های $X\setminus A$ نیز یک تجزیهٔ ضَثمُب است. به‌بیان ساده‌تر: X/A به‌طریق متعارف یک مجتمع ضثمب است (مرجع: دولد [۵]، ص ۹۸).

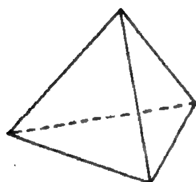
برعکس، در مورد مجتمعهای سادکی، چنین عمل خارج‌قسمت متعارفی وجود ندارد. خارج‌قسمت یک مجتمع سادکی X بر یک زیر مجتمع A، X/A، را معمولاً نمی‌توان به‌یک مجتمع سادکی بدل کرد مگر آنکه تقسیم به‌اجزاء مجدد و یک «نشاندن» تازه، احیاناً در یک فضای اقلیدسی با بعد خیلی بیشتر، صورت گیرد. باز هم به‌عنوان یک مثال ساده، فکر کنید که خارج‌قسمت یک سادک منفرد بر مرزش، با کره همسانریخت است.

به‌همین قیاس، هیچ «سادکچسبانی» متناظر با حجره‌چسبانی در مجتمعهای ضثمب وجود ندارد. پیش از این نیز، هنگامی‌که دو سادک ۱ ـ بعدی را از طریق مرزهایشان به‌هم می‌چسباندیم، مجبور بودیم کارهایی انجام دهیم و انتخابهایی به‌عمل آوریم تا مجتمعی سادکی همسانریخت با آنچه به‌دست می‌آمد (در این مثال S^1) به‌دست آوریم.

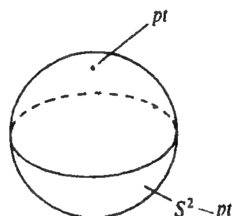
*

برای تجزیهٔ ضَثمبِ یک فضای X، معمولاً حجره‌هایی خیلی کمتر و «طبیعیتر» مورد نیازند، تا آنچه که برای یک مجتمع سادکی همسانریخت با X لازم است. برای سهولت، به‌چند فضای ساده توجه می‌کنیم:

مثال ۱. کرهٔ S^2 به‌عنوان یک مجتمع ضثمب و یک مجتمع سادکی:



S^2 به‌عنوان مجتمع سادکی؛ دست‌کم ۱۴ سادک

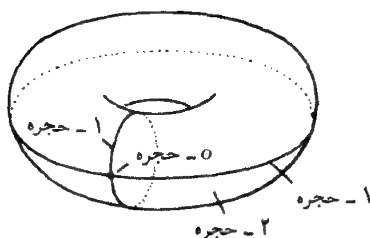


S^2 به‌صورت مجتمع ضثمب: با دو حجره عمل می‌کند

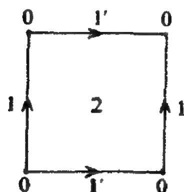
مثال ۲. چنبرهٔ $S^1 \times S^1$. از آنجا که S^1 می‌تواند تجزیهٔ ضثمب به‌دو حجره باشد، می‌توانیم

---
۱. بیش از سایر شاخه‌های توپولوژی.ـم.

$S^۱ \times S^۱$ را به‌چهار حجره تجزیه کنیم:



و یا آنکه آن را به‌شکل فضای خارج‌قسمت مطرح سازیم:



برعکس، چنانچه بخواهیم یک مجتمع سادکی همسانریخت با یک چنبره بسازیم، به‌تعدادی سادک نیاز داریم. همان‌طور که استادگی هیرش[1]، تصادفاً ضمن نوشیدن یک فنجان چای، حدس شتابزدهٔ مرا تصحیح کرد، تعداد درست آن ۴۲ است.

مثال ۳. فضای تصویری n بعدی را به‌یک طریق کاملاً طبیعی می‌توان در تجزیهٔ ضَثمُب به $n+۱$ حجره تجزیه نمود:

$$\mathbb{RP}^n = e_o \cup \ldots \cup e_n,$$

$$\mathbb{CP}^n = e_o \cup e_۲ \cup \ldots \cup e_{۲n},$$

که حجره‌ها فضاهای آفین

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^o \cup (\mathbb{P}^۱ \backslash \mathbb{P}^o) \ldots \cup (\mathbb{P}^n \backslash \mathbb{P}^{n-۱})$$

هستند. تجزیهٔ سادکی به‌صورت طبیعی و ساده برای آن وجود ندارد.

۷. آری، اما . . .؟

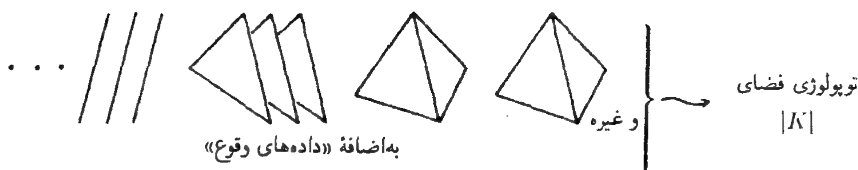
همهٔ این ساختمانها زیبا و قشنگ هستند، اما مجتمعهای سادکی برای آن ساخته نشده‌اند که خود هدف باشند، بل برای آن که کاری انجام دهند: اشیاء هندسی را به‌صورت جبری نشان دهند، تابعگون مانستگی و ناورداهای توپولوژیک مربوط به آنها را حساب کنند، و . . . حال ببینیم تجزیه‌های ضَثمُبی چه‌کار

1. Guy Hirsch

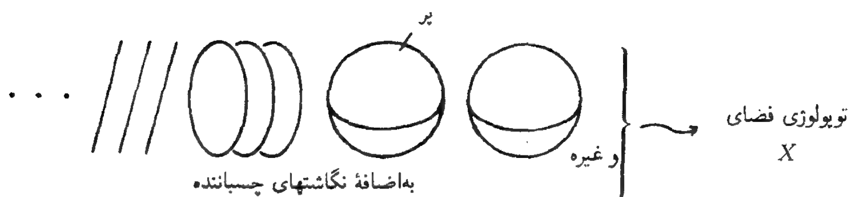
می‌کنند و آن‌طور که شاید و باید، ساده هستند؟ این سؤالی است کاملاً بجا.

مقایسه کنیم و ببینیم هنگامی که در هر دو حالت فضایی را از بلوکهای ساختمانی می‌سازیم، چه‌کاری انجام می‌دهیم.

در مجتمعهای سادکی:



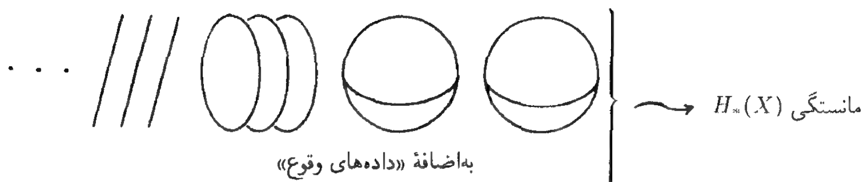
در مجتمعهای ضَثمُبی:



بلافاصله می‌بینیم که اختلاف فاحشی در کاربرد احتمالی این دو مفهوم وجود دارد: در حالی که برای مجتمعهای سادکی داده‌های وقوع اشیایی هستند جبری، و در نتیجه یک نوع «نمایش جبری» مقدماتی برای $|K|$ به‌دست می‌دهند، نگاشتهای چسباننده فقط نگاشتهایی هستند پیوسته به‌شکل $\varphi : S^{n-1} \to X^{n-1}$، و از این‌رو اشیاء هندسی پیچیده‌ای هستند، و خود نیاز به نمایش جبری دارند. بنابراین، بلافاصله دیده نمی‌شود که از جایگزینی حجره‌ها و نگاشتهای چسباننده برای یک فضا چه منظوری داریم. و همین خود دلیل بر این‌است که چرا، حتی اگر فرض کنیم که مجتمعهای ضتمب و مجتمعهای سادکی تقریباً همزمان ابداع شده‌اند، مجتمعهای سادکی می‌بایستی بر مجتمعهای ضتمب ترجیح داده شوند.

حال به مشکلترین قسمت موضوع می‌پردازیم: بررسی مجتمعهای سادکی منجر به بسط نظریهٔ مانستگی می‌شود، و نظریهٔ مانستگی نیز خود در نمایش جبری نگاشتهای چسبنده می‌تواند به‌کار رود. ویژگیهای مانستگی نگاشتهای چسباننده (که بر سبیل اشاره می‌گویم و رد می‌شوم، وگرنه پرداختن به‌جزئیات مانستگی رشته‌ای است که سرِدراز دارد)، می‌توانند به‌کمک برخی «اعداد وقوع[1]» بیان شوند. این اعداد، همهٔ اطلاعات راجع به‌نگاشتهای چسباننده را دربرندارند و به‌علاوه به‌ما امکان نمی‌دهند که توپولوژی این مجتمع را به‌تمام وکمال بازسازی کنیم. اما برای تعیین مانستگی این مجتمع کفایت می‌کنند،

1. incidence numbers



و نکتهٔ مهم این‌است که این روش از روش محاسبهٔ مستقیم مانستگی سادکی، فوق‌العاده کاراتر و سریعتر است.

در این مورد، بحث را کافی می‌شمریم و اکنون بدون اثبات و توضیح اضافی، نتیجه‌ای را که می‌توان خیلی ساده به حافظه سپرد، بیان می‌کنیم: مشخصهٔ اویلرِ یک مجتمع ضتمبِ متناهی برابر است با حاصلجمع متناوب تعداد حجره‌ها در هر بعد. مثلاً در مواردی که تاکنون نام برده‌ایم، داریم:

$$\chi(S^n) = ۱ + (-۱)^n$$
$$\chi(S^۱ \times S^۱) = ۱ - ۲ + ۱ = o$$
$$\chi(\mathbb{RP}^n) = \frac{۱}{۲}(۱ + (-۱)^n)$$
$$\chi(\mathbb{CP}^n) = n + ۱$$

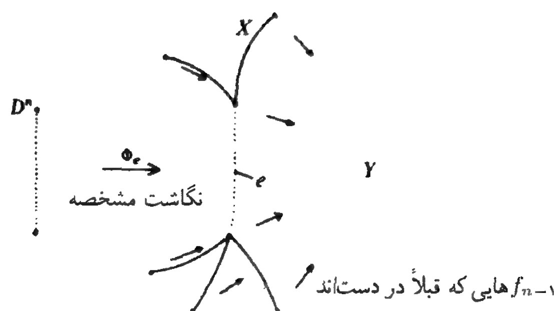
در خاتمه، اجازه دهید اهمیت مجتمعهای ضتمب را در زمینه‌های دیگر نیز خاطرنشان سازم: به‌عنوان مثال، غالباً یک مسألهٔ هندسی به‌پیدا کردن یک نگاشت پیوستهٔ $f : X \to Y$ با ویژگیهایی مشخص بدل می‌شود و غالباً، یک تجزیهٔ ضَتمَبِ X چیزی است که برای روشن‌کردن مطالب در ذهن لازم است. زیرا، با چنین تجزیه‌ای، سعی خواهد شد که نگاشت مطلوب را از راه استقراء روی کالبد بنا کنیم. نخستین نگاشت $f_o : X^o \to Y$ غالباً بدون دردسر به‌دست می‌آید، و اگر قبلاً $f_{n-۱}$ را داشته باشیم

$$f_{n-۱} : X^{n-۱} \to Y$$

از روی آن یک نگاشت پیوستهٔ

$$f_{n-۱} \circ \Phi_e | S^{n-۱} : S^{n-۱} \to Y$$

را برای هر n ـ حجرهٔ e خواهیم داشت:

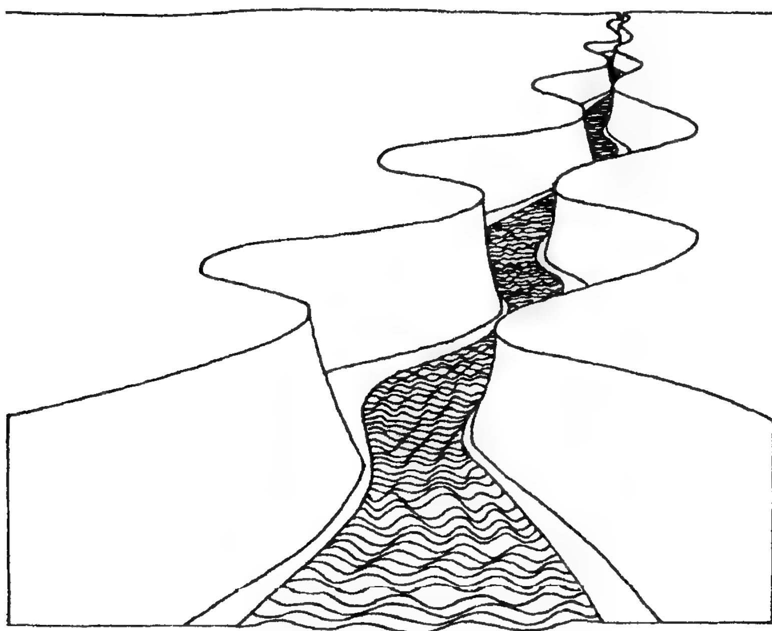


و از اصول موضوعهٔ مجتمعهای ضَثمَب، به‌سادگی نتیجه می‌شود که f_{n-1} را می‌توان به‌یک نگاشت پیوستهٔ $f_n : X^n \to Y$ توسیع داد، اگر و تنها اگر هر یک از نگاشتهای $\alpha_e := f_{n-1} \circ \Phi_e|S^{n-1}$ را بتوان به‌یک نگاشت پیوستهٔ $D^n \to Y$ توسیع داد. معنی این هم آن‌است‌که عضو $[\alpha_e] \in \pi_{n-1}(Y)$ باید صفر باشد، که این هم قطعاً صادق است هنگامی که این گروه مانسته جایی گروه بیمایه باشد ... و قس علیهذا.

«فرضهای ساده‌کننده» کار ریاضیدانان را آسانتر می‌کنند، اما در چه مواقعی باید این فرضها را پیش کشید؟ در توپولوژی جبری، غالباً باید توافقهایی صورت گیرد: فضاها باید به‌قدر کافی خاص باشند تا مجال دهند برخی روشها کارگر افتند و بعضی قضایا کاربرد یابند، اما در عین حال باید به‌قدر کافی کلی باشند تا مثالها و کاربردهای مهمی را در برگیرند. مورد توجه قرار دادن مجتمعهای ضتمب (یا فضاهای مانسته جایی هم‌ارز با آنها)، غالباً توافق خوبی از این قبیل است، و این هم خود دلیل دیگری برای آگاهی یافتن از مفهوم مجتمعهای ضتمب است.

۸

ساختن توابع پیوسته روی فضاهای توپولوژیک



۱. لم اوریسون

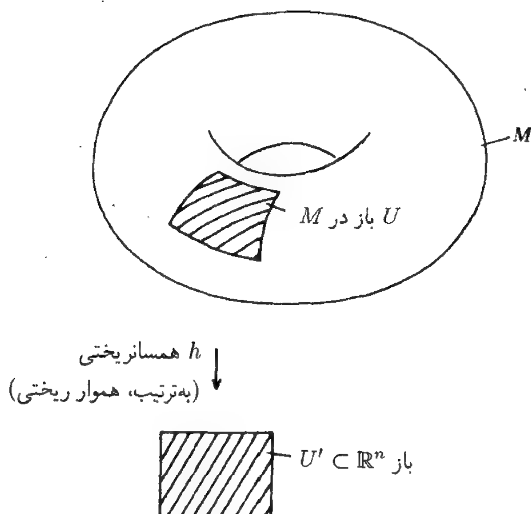
وقتی می‌خواهیم توابعی را با ویژگیهای مخصوصی روی فضای $\mathbb{R}^n$ یا یکی از زیرفضاهای آن بسازیم، آنالیز ریاضی گروه گسترده‌ای از ابزارهای این کار را در دسترس ما قرار می‌دهد. نخستین چیزهایی که

به‌ذهن ما خطور می‌کنند، شاید چندجمله‌ییها و توابع گویا باشند، و تنها با همینها می‌توان خیلی از توابع دیگر را هم ساخت. پس از اینها، نوبت به «توابع مقدماتی»، نظیر توابع نمایی، لگاریتم، توابع مثلثاتی می‌رسد. سپس سریهای توانی، و به‌طور کلیتر، دنباله‌های همگرای یکنواخت از توابع پیوسته‌یی که قبلاً در دسترس بودند، پیش کشیده می‌شوند. همچنین می‌توان با خیال راحت گفت که توابعی با ویژگیهای مطلوب را ممکن است به‌عنوان جوابهای معادلات دیفرانسیل، و یا به‌همین قیاس به‌عناوین دیگر و دیگر، به‌دست آورد.

استفاده از همهٔ این امکانات روی خمینه‌ها اندکی مشکلتر به‌نظر می‌رسد، اما رابطهٔ بین خمینه‌ها و آنالیز چنان نزدیک است که هنوز هم می‌توان اساساً از همان امکانات وسیع برای ساختن توابع پیوسته روی خمینه‌ها بهره گرفت. زیرا از یک سو می‌توان بسیاری از روشهای آنالیز (مثل معادلات دیفرانسیل) را به‌خمینه‌های دیفرانسیلپذیر نیز منتقل نمود؛ از سوی دیگر، می‌توان خمینه‌ها را در $\mathbb{R}^N$ نیز نشانید:

$$(M^n \cong M' \subset \mathbb{R}^N, \text{ برای } N \text{ بس بزرگ}),$$

و در آنجا با آنها به‌عنوان زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^N$ کار کرد. بالاخره، شقّ سومی نیز هست، که غالباً عملیتر از همه است: به‌کمک نقشه[1] ها رابطهٔ مستقیمی بین این خمینه و $\mathbb{R}^N$ برقرار می‌کنیم.

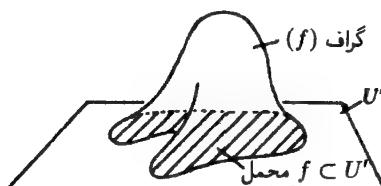


و سپس می‌توانیم هر تابع پیوستهٔ f روی U' را به‌تابع پیوسته‌ای روی U «بالا بریم».

1. chart

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \cong\downarrow h & \searrow^{f\circ h!} & \\ U' & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{R} \end{array}$$

مسلّم است که یک تابع روی U یک تابع روی تمام M نیست، اما مثلاً چنانچه محمل[1] تابع f (یعنی بستار $\overline{\{x|f(x) \neq o\}} =: \mathrm{supp}f$)، که قرار است بالا برده شود، فشرده باشد،

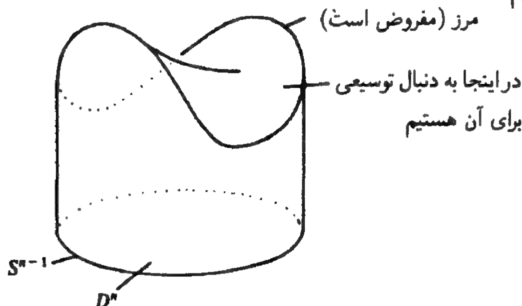


آن‌گاه تابع مرکب $f \circ h$ را می‌توان به‌سادگی به یک تابع پیوستهٔ F، با صفر گرفتن مقدار آن در خارج از U، روی تمام M توسیع داد:

$$F(p) = \begin{cases} f \circ h(p) & \text{اگر } p \in U، \\ o & \text{اگر نه،} \end{cases}$$

توابعی از این قبیل نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند، خواه به‌این دلیل که خود هدفِ مطلوب را برآورند، و یا وسیله‌ای کمکی برای حصول آن باشند («افرازهای واحد»، بخش ۴).

مجتمعهای ضَثمُب نیز ارتباطی مشابه، البتّه نه‌چندان نزدیک، با آنالیز دارند. در این مورد، بااستقراء روی کالبدها و رعایت ویژگیهای مطلوب، با مسألهٔ توسیع یک تابع موجود روی S^{n-1} به همهٔ قرص D^n، مواجه می‌شویم.

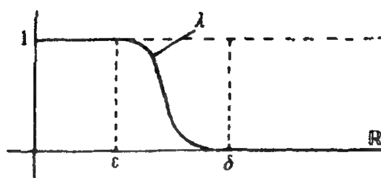


1. support

وبالأخره به‌فضاهای متریکپذیر، که ساختارشان به‌طور قابل ملاحظه‌ای ناچیزتر است، اشاره می‌کنیم:
اما حتی در اینجا، هنگام نیاز به یک تابع واقع بر X، باز می‌توانیم از یک متریک

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

بهره بگیریم. به‌عنوان مثال، فرض کنید مسألهٔ ما پیدا کردن یک تابع پیوستهٔ $f : X \to [o, ۱]$ برای یک همسایگی مفروضِ نقطهٔ $p \in X$ باشد که در خارج این همسایگی متحد با o است و در داخل یک همسایگی کوچکتر، متحد با ۱. در این صورت، یک $o < \varepsilon < \delta$ بس کوچک انتخاب می‌کنیم، یک تابع کمکی $\lambda : \mathbb{R} \to [o, ۱]$، مشابه شکل زیر

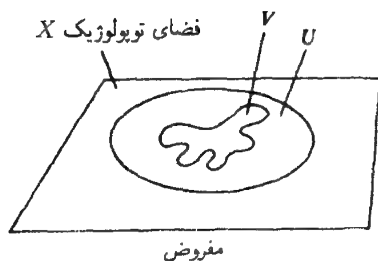


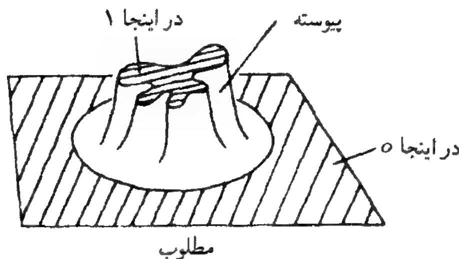
در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $f(x) := \lambda(d(x, p))$.

این مقدمه را از آن جهت آوردم که شما اطمینان حاصل کنید که مسألهٔ ساختن توابع پیوسته بر فضاهای توپولوژیک عمومی، واقعاً یک مسأله است. تصوّر کنید که مجموعه‌های مفروضی چون $V \subset U \subset X$ دارید و می‌خواهید تابعی مانند

$$f : X \to [o, ۱]$$

بیابید که روی V متحد با ۱ و در خارج U متحد با o باشد.





درکجا می‌خواهیم دنبال چنین تابع پیوستهٔ گذار از یک به‌صفر بگردیم، اگر فضای توپولوژیک X نه

رابطهٔ قابل شناسایی با اعداد حقیقی داشته باشد ــ نه نقشه‌هایی، نه حجره‌هایی و نه متریکی؟ بنابراین، مسأله این‌است:

مسألهٔ اساسی دربارهٔ ساختن توابع بر فضاهای توپولوژیک (مسألهٔ لم اوریسون[1]). فرض کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ بسته و جدا از هم در یک فضای توپولوژیک X باشند. یک تابع پیوستهٔ $f : X \to [o, ۱]$ چنان بیابید که $f|A \equiv ۱$, $f|B \equiv o$.

باید توجه داشت که برای هر تابع پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{R}$ مجموعه‌های $f^{-۱}(۱)$ و $f^{-۱}(o)$ در هر حال مجموعه‌هایی بسته‌اند، به‌طوری که مسألهٔ فوق برای A و Bی دلخواه، قابل حل است اگر و تنها اگر برای $\overline{A}$ و $\overline{B}$ قابل حل باشد. به‌همین دلیل، باید فقط حالتی را که A و B بسته‌اند در نظر بگیریم.

یک شرط لازم برای وجود جواب مسأله را می‌توان بی‌درنگ چنین بیان کرد: باید A و B را بتوان با همسایگیهای بازی از هم جدا کرد، زیرا در صورت وجود یک چنین تابع f، مجموعه‌های $f^{-۱}\,(\frac{۳}{۴}, ۱]$ و $f^{-۱}\,[o, \frac{۱}{۴})$، به‌عنوان مثال، همسایگیهای باز جدا از همی برای A و B خواهند بود. (در اینجا و در مطالب آتی، عبارت متداول «همسایگی باز» U برای یک زیرمجموعهٔ $A \subset X$ را به‌کار می‌بریم، که مراد از آن یک مجموعهٔ باز U شامل Aست).

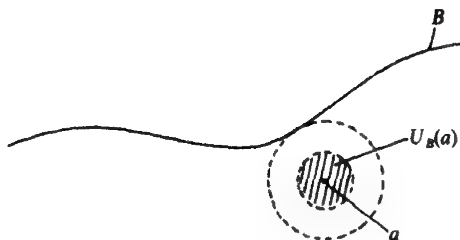
وجود همسایگیهای باز جداگر برای A و B کافی نیست، امّا قضیّهٔ زیر را داریم، که می‌توان گفت قضیهٔ اساسی برای ساختن توابع بر فضاهای توپولوژیک است:

لم اوریسون. فرض کنیم برای فضای توپولوژیک X هر زوج از مجموعه‌های بستهٔ جدا از هم را بتوان با همسایگیهای باز جدا از همی از یکدیگر جدا کرد: در این صورت، برای هر زوج از مجموعه‌های بستهٔ جدا از هم، یک تابع پیوستهٔ $f : X \to [o, ۱]$ وجود دارد که بر یکی از دو مجموعه مقدار ۱ می‌گیرد و بر مجموعهٔ دیگر مقدار o.

برهان در بخش ۲ خواهد آمد. اما، پیش از پرداختن به‌آن، نگاهی به برخی از رده‌های فضاهای توپولوژیک با این ویژگی جداگری، می‌اندازیم. نخست ملاحظه می‌کنیم که همهٔ فضاهای متری با لبداهه در این شرط صدق می‌کنند: فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. چنانچه B یک مجموعهٔ بستهٔ ناتهی باشد، هر نقطهٔ $a \notin B$ همواره «فاصلهٔ» مثبتی از B دارد، یعنی $\inf_{x \in B} d(a, x) > o$، زیرا یک گوی کاملی به‌مرکز a باید وجود داشته باشد که خارج B است. گوی باز به‌مرکز a و شعاعی برابر نصف فاصلهٔ a از B را با $U_B(a)$ نمایش می‌دهیم.

---

1. Urysohn



حال چنانچه A و B دو مجموعهٔ بستهٔ جدا از هم باشند، با قراردادن

$$U := \bigcup_{a\in A} U_B(a) \text{ و } V : \bigcup_{b\in B} U_A(b)$$

می‌توان همسایگیهای باز جداگری برای آنها به‌دست آورد.

درمجتمعهای ضَشمُب نیز، همواره می‌توان مجموعه‌های بسته را با همسایگیهای باز از یکدیگر جدا کرد: با استفاده از استقراء روی کالبدها، موضوع را برمی‌گردانیم به مسأله‌ای در D^n که به‌سادگی قابل حل است.

برای سومین مثال، به‌گزارهٔ زیر توجه می‌کنیم.

گزاره. در هر فضای فشردهٔ هاوسدورف، دو مجموعهٔ بستهٔ جدا از هم را می‌توان با همسایگیهای باز از یکدیگر جدا کرد.

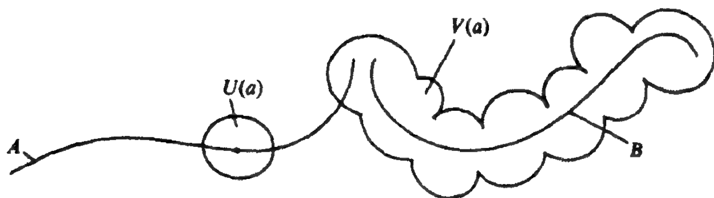
برهان. هر دو نقطهٔ $A \ni a$ و $B \ni b$ را می‌توان، به‌استناد هاوسدورف بودن فضا، به‌وسیلهٔ همسایگیهای باز $U(a,b)$ و $V(a,b)$ از یکدیگر جدا کرد. برای aی ثابت، نقاط $b_1, \cdots, b_r \in B$ را چنان می‌یابیم که $B \subset V(a,b_1) \cup \cdots \cup V(a,b_r)$، و این هم ممکن است زیرا B زیرفضای بسته‌ای است از یک فضای فشرده، و در نتیجه فشرده است. پس

$$U(a) := U(a,b_1) \cap \cdots \cap U(a,b_r)$$

و

$$V(a) := V(a,b_1) \cup \cdots \cup V(a,b_r)$$

همسایگیهای جداگری برای a و B به‌دست می‌دهند:



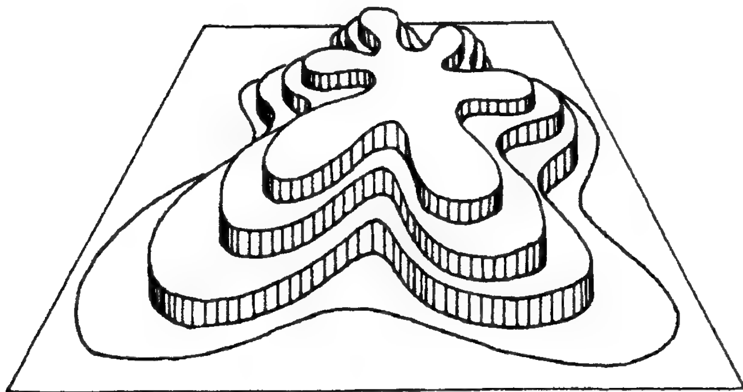
و به‌طریق مشابه، $V := V(a_1) \cap \cdots \cap V(a_s)$ و $U := U(a_1) \cup \cdots \cup U(a_s)$ مجموعه‌های A و B را جدا می‌کنند. □

بنابراین، لم اوریسون در مورد فضاهای فشردهٔ هاوسدورف نیز قابل إعمال است، و اما دربارهٔ این فضاها نمی‌توان گفت که «از ابتدای امر» یا «بنابر تعریف» به‌اعداد حقیقی مربوط بوده‌اند. پس باید تصدیق کنید که لم‌اوریسون واقعاً قضیهٔ درخور توجّهی است.

اما شاید پس از مطالعهٔ برهان، بخواهید دراین عقیده تجدیدنظرکنید. اثبات کاملاً ساده است و ممکن است این احساس را در شما پدید آورد که «خود من هم می‌توانستم همین‌طور فکرکنم». اما، نمی‌دانم آیا این اندکی خود فریبی نخواهد بود؟ پس، پیش از خواندن برهان، سعی کنید توان خود را بیازمایید . . .

۲. برهان لم اوریسون

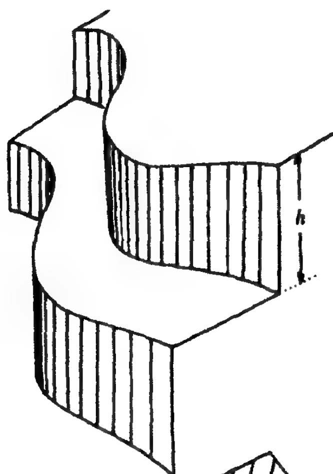
فکر اصلی برهان، پیداکردن تابع مطلوب به‌عنوان حد توابع پله‌یی است که تدریجاً از A به B تنزل می‌کنند، و در عین حال باریکتر و ریزتر می‌شوند:

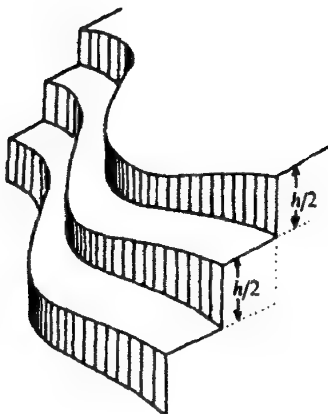


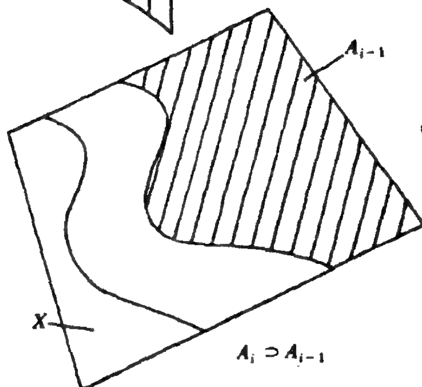
قبول چنین تابع پله‌یی، مانند قبول‌کردن زنجیری است از مجموعه‌های «مابین» A و $X \setminus B$:

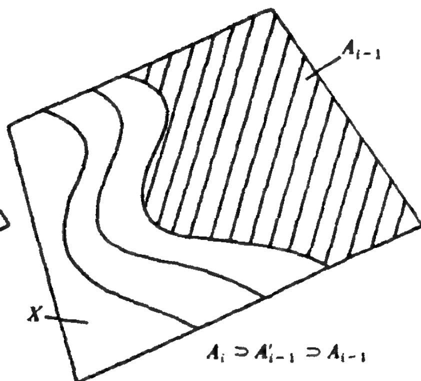
$$A = A_o \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset X \setminus B$$

سپس تابع پله‌یی «متناظر» آن‌را چنین تعریف می‌کنیم که بر A_o برابر است با ۱، بر A_1/A_o برابر است با $1 - \frac{1}{n}$، و بر A_2/A_1 برابر است با $1 - \frac{2}{n}$ و . . . و خارج از A_n، و به‌ویژه بر B، برابر است با o. البته، یک چنین تابعی پیوسته نیست. برای آنکه جهشهای آن‌را به‌تدریج کوچکتر و کوچکتر کنیم، به‌قسمی که در حدّ به یک تابع پیوسته برسیم، به‌این شکل عمل می‌کنیم که هر پله را با «لوحه‌هایی» اضافی چنان پُر می‌کنیم که هر بار ارتفاع جهشها نصف شود:

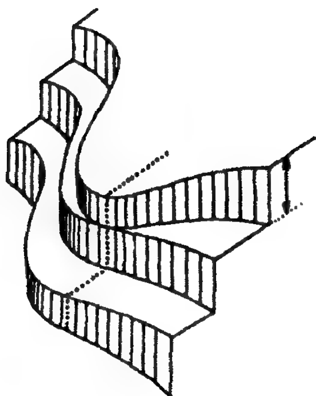


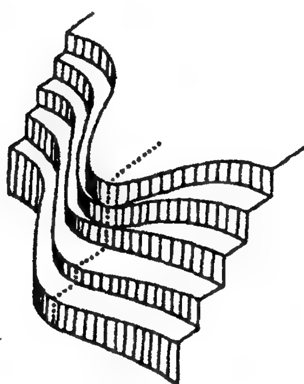






فکر اصلی همین است. اما، اگر بخواهیم این شیوهٔ کار موفقیت‌آمیز باشد، باید اطمینان یابیم که مرز A_{i-1} هیچ‌گاه با مرز A_i برخورد نمی‌کند. زیرا در نقطه‌ای که این مرزها به‌هم برمی‌خورند، مقدار جهش اجباراً بیش از «مقدار ظاهری» h خواهد بود، و مهمتر از همه، به‌هر تعداد که لوحهٔ جدید اضافه کنیم، این مقدار جهش مرتباً از h بزرگتر می‌شود:





لذا باید تضمین کنیم که بستار A_{i-1} همواره در درون A_i می‌ماند، یعنی همواره $\overline{A}_{i-1}\subset \mathring{A}_i$. در شروع استقراء، زنجیر مجموعه‌های ما فقط شامل دو مجموعه است، $A =: A_0 \subset A_1 := X\backslash B$، و بدیهی است که این شرط برقرار است. حفظ و رعایت شرط فوق در حین تظریف استقرایی این رشته، دقیقاً همان جایی است که اصل موضوع جداسازی وارد برهان می‌شود:

نکته. اگر X چنان باشد که هر دو زیرمجموعهٔ بستهٔ جدا از هم را بتوان با همسایگیهای بازی از یکدیگر جدا کرد، آنگاه برای هر دو زیرمجموعهٔ M و N با شرط $\overline{M}\subset \mathring{N}$، یک مجموعهٔ سوم L «مابین» آنها هست به‌قسمی که $\overline{M}\subset \mathring{L} \subset \overline{L}\subset \mathring{N}$؛ برای این کار، کافی است که M و $X\backslash N$ را با همسایگیهای بازی چون U و V جدا کنیم و قرار دهیم $L := U$.

*

پس فکر اصلی برهان این‌است. استفاده از $\overline{A}_{i-1}\subset \mathring{A}_i$، اقدام احتیاطی آشکاری است. آیا لازم است اقدامهای احتیاطی دیگری صورت گیرد؟ اگر چنین بود، مسلماً هنگام تلاش برای ارائهٔ فکر اصلی بلافاصله، اشاره‌ای به‌آن می‌کردیم ـ اما در واقع، مانع دیگری بر سر راه نیست و، بی‌آنکه نیاز به ترفندی باشد، می‌توان برهان را بدون دردسر ادامه داد. بگذارید کاملاً قانع شویم:

برهان لم اوریسون. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های بستهٔ جدا از همی در X باشند. یک زنجیر صعودی چون $\mathfrak{A} = (A_0, \cdots, A_r)$ از زیرمجموعه‌های X به‌شکل

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_r \subset X\backslash B$$

را پذیرفتنی[1] گوییم هرگاه به‌ازای هر i، $\overline{A}_{i-1}\subset \mathring{A}_i$. تابع $X \to [0,1]$ را که مقدار ثابت ۱ را روی A اختیار می‌کند، و مقدار ثابت $1 - k/r$ را روی $A_k\backslash A_{k-1}$، و مقدار ثابت 0 را خارج از A_r، تابع پله‌یی یکنواخت[2] وابسته به‌زنجیر $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. مجموعه‌های باز $\mathring{A}_{k+1}\backslash \overline{A}_{k-1}$، $k = 0, 1, \cdots, r$، را که در آنها $A_{-1} = \varnothing$ و $A_{r+1} = X$، به‌دلیل معنیِ هندسیِ آنها حوزه‌های پله‌یی[3] $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. باید توجه کرد که حوزه‌های پله‌یی یک زنجیر پذیرفتنی، همهٔ فضا را می‌پوشانند، زیرا

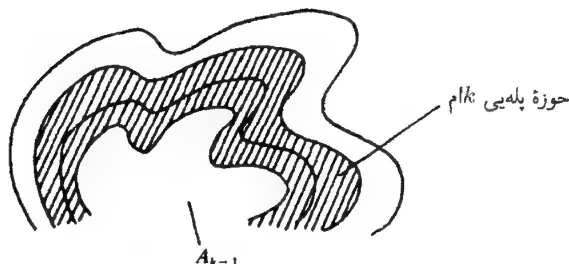
$$\overline{A}_k \backslash \overline{A}_{k-1}\subset \mathring{A}_{k+1}\backslash \overline{A}_{k-1}$$

همچنین، ملاحظه شود که تابع پله‌یی یکنواخت در هر یک از حوزه‌های پله‌یی بیش از $\frac{1}{r}$ نوسان ندارد. بالأخره، منظور از یک تظریف[4] یک زنجیر پذیرفتنی $(A_0, \cdots, A_r)$ زنجیری است پذیرفتنی

1. admissible 2. uniform step function 3. step domains
4. refinement

به‌صورت

$$(A_o, A'_1, A_1, \cdots, A'_r, A_r)$$



همان‌گونه که در نکتهٔ فوق نشان داده شد، ویژگی جداسازی فضا، که جزء فرض قضیه است، تضمین می‌کند که هر زنجیر پذیرفتنی را می‌توان تظریف کرد.

حال فرض می‌کنیم که $\mathfrak{A}_o$ زنجیر پذیرفتنی $(A, X\backslash B)$ باشد و $\mathfrak{A}_{n+1}$ تظریف $\mathfrak{A}_n$ برای هر n. تابع پله‌یی یکنواخت زنجیر $\mathfrak{A}_n$ را f_n می‌نامیم. روشن است که حکم زیر برقرار است: دنبالهٔ تابعی $(f_n)_{n>1}$، یکنوا صعودیِ نقطه‌یی، وکراندار به‌مقدار ۱ است. به‌ویژه همگرای نقطه‌یی است، و تابع حد $f := \lim_{n\to\infty} f_n : X \to [o, 1]$ ویژگی مطلوب $f|A = 1$ و $f|B = o$ را دارد، زیرا هر یک از f_nها همین ویژگی را دارد. آنچه برای اثبات می‌ماند، پیوستگی f است. برای این کار، ملاحظه می‌کنیم که همواره $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$ و نوسان f_n بر هر حوزهٔ پله‌یی بیش از $\frac{1}{2^n}$ نیست. پس، نوسان خود f نیز بر هر حوزهٔ پله‌یی بیش از $\frac{1}{2^{n-1}}$ نخواهد بود و همین امر، پیوستگی را ایجاب می‌کند: اگر $\varepsilon > o$ و $x \in X$، nای چنان انتخاب می‌کنیم که $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$، وکل حوزهٔ پله‌یی $\mathfrak{A}_n$ راکه شامل x (درواقع همسایگی باز نقطهٔ x!) است در نظر می‌گیریم. این حوزه، تحت f بتوی بازهٔ $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ نگاشته می‌شود و در نتیجه f پیوسته است. □

۳. لمّ توسیع تیتسه

شاید در نگاه اول، لم‌اوریسون به‌نظر خیلی خاصّ جلوه کند، اما کارایی این لم خیلی بیش از به‌دست دادن توابعی با مقادیر o و ۱ در بعضی جاهاست. خصوصاً، دارای نتیجه و تعمیم مهم زیر است:

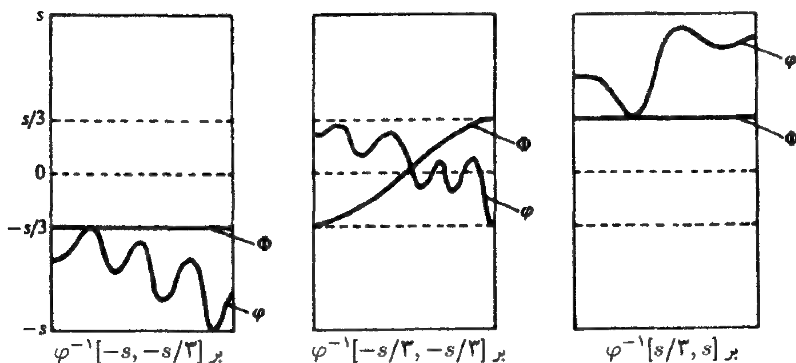
لم توسیع تیتسه. فرض کنیم که در یک فضای توپولوژیک X، هر دو زیرمجموعهٔ بستهٔ جدا از هم، بتوانند توسّط همسایگیهای بازی ازیکدیگر جدا شوند. در این صورت، هر تابع پیوستهٔ $f : A \to [a, b]$ که روی یک زیرمجموعهٔ بستهٔ A تعریف شده باشد، می‌تواند به یک تابع پیوستهٔ $F : X \to [a, b]$

توسیع داده شود.

برهان. عجالتاً، و فقط برای این برهان، اصطلاح زیر را وارد می‌کنیم: اگر $\varphi : A \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوستهٔ کراندار باشد و $s := \sup_{a\in A}|\varphi(a)|$، آنگاه یک تابع پیوستهٔ $\Phi : X \to [-s/۳, s/۳]$ را یک «توسیع تقریبیِ ثلثِ نزدیک»[1] برای φ نامیم هرگاه برای هر $a \in A$، نابرابری $|\varphi(a) - \Phi(a)| \leqslant ۲s/۳$ برقرار باشد. پس، یک چنین تابع Φ جواب واقعی مسألهٔ توسیع برای φ نیست، بلکه فقط تقریب خامی برای آن است. وجود یک چنین توسیعهای ثلث نزدیک را می‌توان مستقیماً با کاربردِ لم اوریسون به‌طورِ «یکضرب» ثابت کرد: دو مجموعهٔ $\varphi^{-۱}([s/۳, s])$ و $\varphi^{-۱}([-s, -s/۳])$ مجموعه‌های بستهٔ جدا از همی هستند در A، و همچنین در X، زیرا خود A در X بسته است. بنابراین، یک نگاشت پیوستهٔ $X \to [o, ۱]$ وجود دارد که روی این دو مجموعه مقادیر ۱ و o اختیار می‌کند، و به‌کمک این نگاشت یک نگاشت پیوستهٔ

$$\Phi : X \to [-s/۳, s/۳]$$

به‌دست می‌آوریم که روی همان دو مجموعه، مقادیر $s/۳$ و $-s/۳$ اختیار می‌کند. بدیهی است که یک چنین تابع Φ یک توسیع ثلث نزدیک برای φ است.



اکنون به‌ساختن F می‌پردازیم. بی‌آنکه در کلیت خللی حاصل شود، می‌توان فرض کرد که $[a, b] = [-۱, ۱]$. نخست یک توسیع تقریبی ثلث نزدیک برای f انتخاب می‌کنیم و آن را $F_۱$ می‌نامیم، سپس یک توسیع تقریبی ثلث نزدیک برای تابع «خطا»[2] ی $f - F_۱|A$ می‌سازیم و آن‌را $F_۲$ می‌نامیم. پس حاصلجمع $F_۱ + F_۲$ توسیع تقریبی بهتری است. روش را به استقرا ادامه می‌دهیم: فرض می‌کنیم $F_{n+۱}$ یک توسیع تقریبی ثلث نزدیک برای

$$f - (F_۱ + \cdots + F_n)|A$$

---

1. $\frac{1}{3}$-close approximate extension 2. error

باشد. در این صورت، روشن است که داریم:

برای هر $a \in A$، $\left|f(a) - (F_1(a) + \cdots + F_n(a))\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$، و

برای هر $x \in X$، $|F_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

بنابراین، $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ همگرای یکنواخت به یک توسیع پیوستهٔ $F : X \to [-1, 1]$ از f است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

لم توسیع تیتسه را نیز می‌توان برای حالتی فراتر از صورت اصلی آن، که هم‌اکنون ثابت کردیم، به‌کار برد.

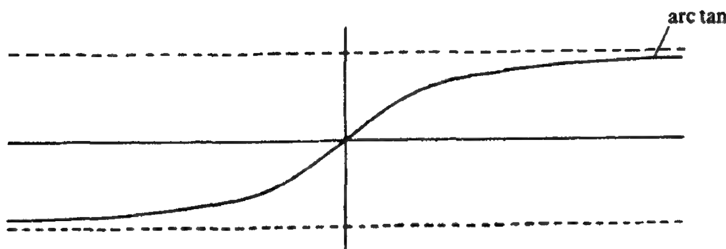
فرع ۱. اگر در لم توسیع تیتسه، به‌جای بازهٔ $[a, b]$ در $\mathbb{R}$، متوازی‌السطوح

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

در $\mathbb{R}^n$ به‌عنوان حوزهٔ مقادیر اختیار شود، لم با لبداهه معتبر می‌ماند (صورت اصلی لم را برای هر تابع مؤلفه به‌کار برید). در نتیجه، برای همهٔ حوزه‌های مقادیر همسانریخت با متوازی‌السطوح، مثل گوی بستهٔ D^n، نیز لم معتبر خواهد بود: تابع $f : A \to \mathbb{R}^n$ با قید $|f(a)| \leqslant r$ را می‌توان به‌طور پیوسته به تابع $F : X \to \mathbb{R}^n$ با قید $|F(x)| \leqslant r$ توسیع داد.

فرع ۲. لم توسیع تیتسه برای حالتی هم که به‌جای $[a, b]$ حوزهٔ مقادیر را $\mathbb{R}$ (و بنابراین $\mathbb{R}^n$ نیز) بگیریم، صادق است.

برهان. (اقتباس از ص ۱۷، مرجع [۷]). نخست تابع $\varphi := \text{arc tan} f : A \to (-\pi/2, \pi/2)$ را به تابع $\Phi : X \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ توسیع می‌دهیم. البته حالا نمی‌توان فوراً $\tan \Phi$ را به‌دست آورد، زیرا



ممکن است که Φ مقادیر $\pm\pi/2$ را اختیار کند. اما در کجا؟ مسلماً فقط روی یک مجموعهٔ بستهٔ B جدا از A. پس اگر با استفاده از لم اوریسون تابع پیوستهٔ $\lambda : X \to [0, 1]$ را چنان بگیریم که $\lambda|A = 1$ و $\lambda|B = 0$، آنگاه حاصلضرب $\lambda\Phi : X \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ یک توسیع پیوستهٔ $\text{arc tan} f$ خواهد بود که مقادیر $\pm\frac{\pi}{2}$ را اختیار نمی‌کند و $F := \tan \lambda\Phi$ یک توسیع پیوستهٔ f خواهد بود. □

۴. افرازهای واحد و مقطعهای کلاف برداری

تعریف (افراز واحد). فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. یک خانوادهٔ $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از توابع پیوستهٔ $\tau_\lambda : X \to [o, ۱]$ را یک افراز واحد[1] می‌نامیم هرگاه: (۱) «موضعاً متناهی» باشد، به‌این معنی که هر نقطهٔ $x \in X$ دارای یک همسایگی باشد که در آن همهٔ τ_λها، جز برای تعدادی متناهی از λها، صفر شوند؛ و (۲) برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda(x) = ۱$$

افراز واحد را وابسته[2] به یک پوشش باز مفروض $\mathfrak{A}$ از X گوییم هرگاه برای هر λ، محمل تابع τ_λ، یعنی بستار

$$\text{supp}\, \tau_\lambda := \overline{\{x \in X | \tau_\lambda(x) \neq o\}}$$

کاملاً مشمول در یکی از مجموعه‌های این پوشش باشد.

افرازهای واحد در بقیّهٔ این فصل مورد مطالعهٔ ما قرار می‌گیرند. چگونگی به‌دست آوردن افرازهای واحد، در بخشهای آتی مورد بحث قرار خواهد گرفت. فعلاً می‌خواهیم روشن کنیم که چنانچه افرازها در دست باشند، با آنها چه کار می‌توان کرد. برای این منظور، نخست به ساختن مقاطع در کلافهای برداری می‌پردازیم. زیرا این کار یک اصلی را، که نمونهٔ بارزی از کاربرد افراز واحد در تعدادی از مثالهای خاص است، روشن می‌سازد. مقدمتاً، اجازه دهید نگاهی اجمالی به کلافهای برداری و مقاطع آنها بیندازیم.

سیری کوتاه در کلافهای برداری و مقاطع آنها

تعریف (کلاف برداری). یک کلاف برداری حقیقی n بعدی[3] بر یک فضای توپولوژیک X از سه جزء تشکیل شده است:

(i) یک فضای توپولوژیک E (به نام «فضای کل[4]»)؛

(ii) یک نگاشت پوشای پیوستهٔ («تصویر[5]») $\pi : E \to X$؛

(iii) یک ساختار فضای برداری حقیقی بر هر «تار[6]» $E_x := \pi^{-۱}(x)$.

برای آنکه این اجزاء، یک کلاف برداری n بعدی روی X تشکیل دهند، تنها باید در یک اصل موضوع صدق کنند:

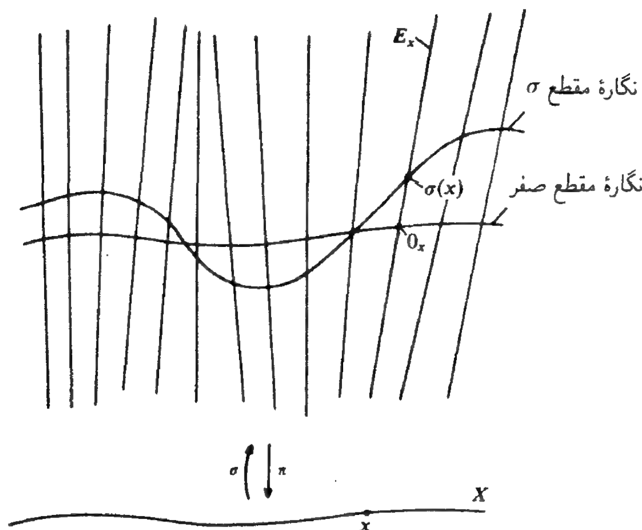
1. partition of unity 2. subordinate 3. n-dimensional real vector bundle
4. total space 5. projection 6. fiber

اصل موضوع (بیمایگی موضعی[1]). بهازای هر نقطه از X یک «نقشهٔ کلافی»، یا به‌طور کوتاهتر یک «نقشه»، مانند (h, U)، یعنی یک همسایگی باز U و یک همسانریختی

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow[\cong]{h} U \times \mathbb{R}^n$$

وجود دارد به‌قسمی که تحدید آن به E_x برای هر $x \in U$، یک یکریختی خطی به‌روی $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ است.

تعریف (مقاطعِ کلافهای برداری). یک نگاشت پیوستهٔ $\sigma : X \to E$ که هر نقطه را به‌عضوی در تار خودش مربوط کند (یعنی به‌قسمی باشد که $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_X$)، یک مقطع[2] E نامیده می‌شود. به‌ویژه، برای هر کلاف برداری، نگاشت $\sigma : X \to E$ که هر x را به مبدأ E_x می‌برد، یک مقطع («مقطع صفر»)[3] است.



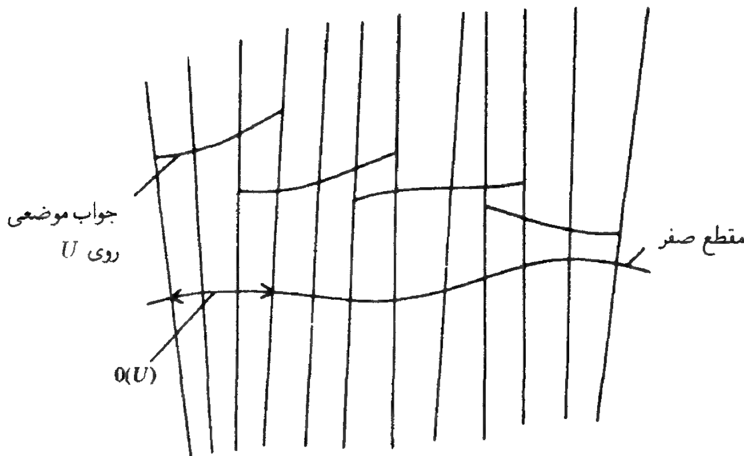
اگر از من سؤال شود که به‌نظر شما «مهمترین» مثالهای کلاف برداری چه‌ها هستند؟ بلادرنگ جواب خواهم داد: کلافهای مماسیِ[4] $TM \xrightarrow{\pi} M$ بر خمینه‌های دیفرانسیلپذیر n بعدیِ M. مقاطع کلافهای مماسی، دقیقاً میدانهای برداری مماس[5] بر M هستند. همچنین، اشیاء عدیدهٔ دیگری در آنالیز و هندسه، از قبیل صورتهای دیفرانسیل متناوبِ[6] متریکهای ریمانی، و انواع «میدانهای تانسوری هموردا و پادوردا»،[7] مطابق نامگذاریها و اصطلاحات علمیِ کمابیش مهجور، مقاطع کلافهایی هستند که از کلاف مماسی، مشتق شده‌اند.

---

1. local triviality 2. section 3. zero section 4. tangent bundles
5. tangent vector fields 6. alternating differential forms
7. co-and contravariant tensor fields

اما کلافهای برداری و مقاطع آنها نه تنها بر خمینه‌ها، بلکه بر فضاهای توپولوژیک کلیتر نیز باید مطالعه شوند. زیرا، کلافهای برداری روی X به تابعگون K («نظریهٔ K»)[1] از رستهٔ توپولوریک به رستهٔ حلقه‌ها منجر می‌شود که مطالعهٔ آن امروزه ضروری است (هر چند، چگونگی پیدایش آن‌را، در اینجا نمی‌توان نشان داد). به‌این دلیل، که دلیل کوچکی نیست، من حتی وارد صحبت دربارهٔ نقش نظریهٔ K هم نمی‌شوم، و فقط به‌ذکر یک مرجع می‌پردازم: نظریهٔ K، تألیف مایکل عطیه[2]. ضمناً باید اشاره کنم که، در این کتاب، قضیهٔ توسیع تیتسه و افرازهای واحد، از آغاز به‌عنوان ابزارهای این نظریّه به‌کار برده شده‌اند (بخش ۴.۱). در اینجا، (طبق وعده)، به‌سیر بسیار کوتاه خود در کلافهای برداری و مقاطع آنها پایان می‌دهم.

اکنون فرض کنیم $E \xrightarrow{\pi} X$ یک کلاف برداری روی X باشد، و بخواهیم یک مقطع $f : X \to E$ با ویژگیهای معیّنی بسازیم. البته، اگر هیچ ویژگیی مورد نیاز نباشد، می‌توانیم مقطع صفر را در نظر بگیریم. همچنین، فرض کنیم که این مسأله، مثلاً با استفاده از نقشه‌ها، موضعاً حلپذیر باشد. در این‌صورت، می‌توان یک پوشش باز $\mathfrak{A}$ برای X یافت به‌گونه‌ای که برای هر مجموعهٔ U در این پوشش، یک «جواب موضعی» برای مسأله، یعنی یک مقطع $U \to \pi^{-1}(U)$ با ویژگیهای مطلوب، موجود باشد.



حال نوبت به‌افراز واحد می‌رسد. یک افراز واحد $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ وابسته به $\mathfrak{A}$، در صورت امکان (رجوع شود به بخش ۵) انتخاب می‌کنیم، و سپس برای هر λ، یک مجموعهٔ U_λ در $\mathfrak{A}$ شامل محمل τ_λ، و یک جواب موضعی

$$f_\lambda : U_\lambda \to \pi^{-1}(U_\lambda)$$

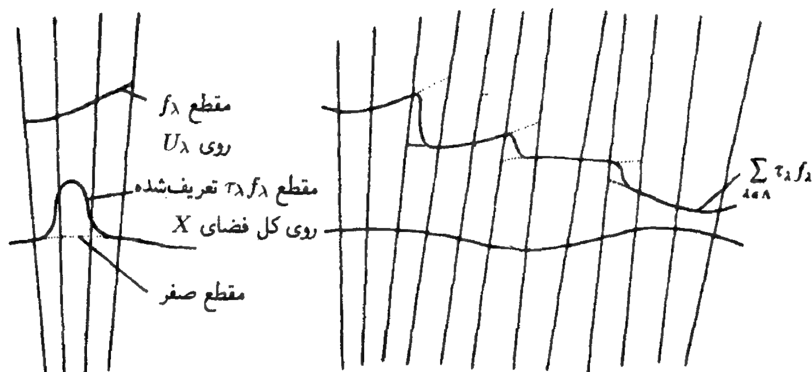
---

1. K-theory 2. M. Atiyah: *K-theory*, New York-Amsterdam, 1967.

در نظر می‌گیریم: اکنون روشن است که چگونه می‌توان $\tau_\lambda f_\lambda$ را، که در آغاز فقط روی U_λ تعریف شده بود، به‌عنوان یک مقطع پیوسته روی تمام X در نظر گرفت: برای این کار، آن‌را با مقدار o به خارج از U_λ توسیع می‌دهیم و سپس با استفاده از متناهی موضعی بودن افراز واحد، به‌کمک دستور

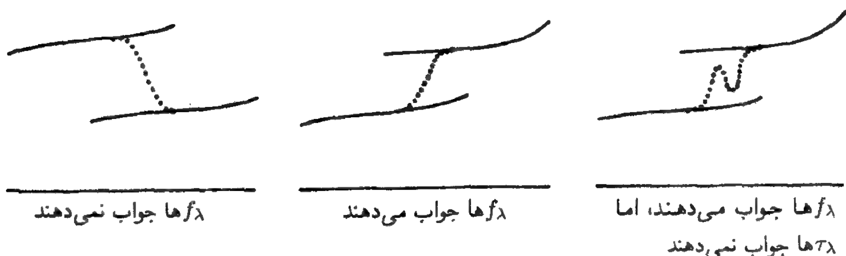
$$f := \sum_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda f_\lambda$$

یک مقطع پیوستهٔ سراسری[1] $f : X \to E$ که به‌اصطلاح، جوابهای موضعی را به‌بهترین وجه ممکن درونیابی می‌کند، به‌دست می‌آوریم: اگر در نقطهٔ $x \in X$، همهٔ f_λهایی که در آنجا تعریف شده‌اند مقدار مشترک $f_\lambda(x)$ را اختیار کنند، f نیز همین مقدار مشترک را اختیار خواهد کرد، زیرا $\sum_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda \equiv 1$. اما، اگر مقادیر f_λها در نقطهٔ x متفاوت باشند، f میانگین این مقادیر را با «وزنهای» $\tau_\lambda(x)$، $\lambda \in \Lambda$، به‌دست می‌دهد. اکنون مسأله این‌است که ببینیم تحت چه شرایطی، با این شیوهٔ عمل، ویژگیهای مطلوبِ جوابهای موضعی f_λ به‌مقطع سراسری f منتقل می‌شوند؟



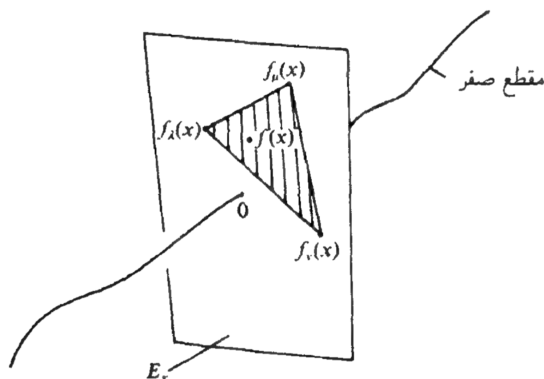
در برخی از کاربردها، می‌توان این کار را فقط با انتخاب ماهرانهٔ f_λها و τ_λها انجام داد. مثال فوق‌العاده ساده‌شدهٔ زیر را در نظر بگیرید تا ببینید چرا چنین است:

ویژگی مورد نظر: «یکنوای صعودی» بودن، $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$، $X = \mathbb{R}$



1. global continuous section

در اینجا به بحث دربارهٔ چنین مواردی نمی‌پردازیم، بلکه موارد متعدد دیگری را که در آنها ویژگی مطلوب خودبه‌خود از f_λها به f منتقل می‌شود، در نظر می‌گیریم. ویژگیهایی از این قبیل را «ویژگیهای محدب»[1] نامند. وجه نامگذاری آن این‌است که $\tau_\lambda(x) \in [\circ, \backslash]$ و $\sum \tau_\lambda = \backslash$ به‌این معنی است که برای هر x، نگارهٔ $f(x)$ در غلاف محدب[2] تعدادی متناهی از $f_\lambda(x)$ها قرار دارد:



نکته. فرض کنیم $\pi : E \to X$ کلافی برداری روی یک فضای توپولوژیک X است که به هر پوشش باز این فضا یک افراز واحد وابسته است. به‌علاوه، فرض می‌کنیم که $\Omega \subset E$ مجموعه‌ای تاری ـ محدب[3] باشد، یعنی هر $\Omega_x := \Omega \cap E_x$ مجموعه‌ای محدب باشد، و بالأخره فرض می‌کنیم که مقاطعی موضعی از E وجود داشته باشند که در Ω نشسته‌اند، یعنی هر نقطهٔ X یک همسایگی باز U و یک مقطع موضعی $U \to \pi^{-\backslash}(U)$ دارد که نگاره‌اش در Ω واقع است. در این‌صورت، یک مقطع سراسری[4] $f : X \to E$ وجود دارد که نگاره‌اش در Ω واقع است.

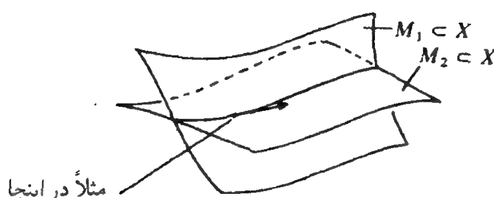
هر بار که این نوع استدلال را به‌کار می‌برند، معمولاً به‌گفتن جملاتی این‌چنین اکتفا می‌کنند که: «مقطعهای موضعی با چنین و چنان ویژگی وجود دارند و چون این ویژگی محدب است، با استفاده از افرازهای واحد، مقطعی سراسری با همان ویژگی به‌دست می‌آوریم». این بیانی است کوتاه و عالی که ما را از دردِسرِ نمادهای مفصّل نجات می‌دهد. اکنون مثالی چند از این‌گونه ویژگیهای محدب را بررسی خواهیم کرد. همچنین باید توجه کنیم که چندین ویژگی محدب روی هم، باز یک ویژگی محدب تشکیل می‌دهند (اشتراک مجموعه‌های محدب، مجموعه‌یی است محدب).

مثال ۱. ویژگی انطباق روی یک مجموعهٔ $A \subset X$، با مقطع مفروضی چون $f_\circ : A \to \pi^{-\backslash}(A)$، یک ویژگی محدب است: برای $a \in A$، $\Omega_a = \{f_\circ(a)\}$، و برای

1. convex properties 2. convex hull 3. fiberwise convex
4. global section

$x \notin A$ ، Ω_x کل تار E است. بنابراین، اگر بدانیم که می‌توان f را، مثلاً با استفاده از لم توسیع تیتسه، توسیع داد، آنگاه می‌توانیم یک توسیع سراسری با استفاده از افراز واحد به‌دست آوریم.

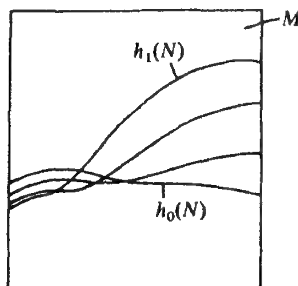
مثال ۲. فرض کنیم X یک خمینهٔ دیفرانسیلپذیر باشد و $E := TX$. برای میدانهای برداری بر X (یعنی مقاطع در TX)، ویژگی مماس بودن بر یک یا چند زیر خمینه، یک ویژگی محدب است.



مثال ۳. در ارتباط با مثال (۱)، مشاهدهٔ زیر غالباً مفید واقع می‌شود: فرض کنیم M یک خمینهٔ دیفرانسیلپذیر باشد و $X := M \times [0,1]$ و $E := TX$. برای یک میدان برداری بر X، این ویژگی که مؤلفه‌اش در امتداد $[0,1]$ برداریکهٔ استاندهٔ $\partial/\partial t$ باشد، یک ویژگی محدب است. شارش[1] یک چنین میدان برداری، در هر لحظهٔ t، $M \times 0$ را به‌روی $M \times t$ می‌برد. با این روش، در توپولوژی دیفرانسیل، «هموار جابیها»[2] یعنی مانسته جابیهای دیفرانسیلپذیر

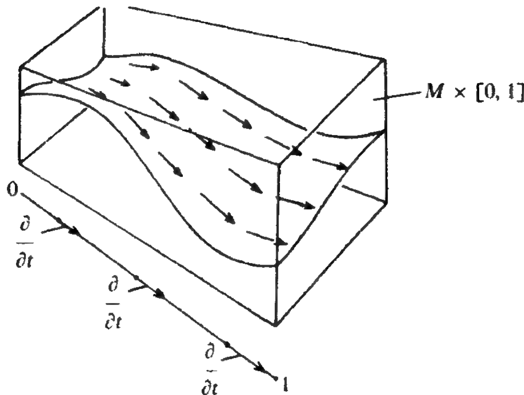
$$H : M \times [0,1] \to M$$

ساخته می‌شوند که در آنها برای هر t، $H_t : M \to M$ یک هموارریختی[3] است و $H_0 = \mathrm{Id}_M$. البته، منظور پیدا کردن یک هموار جایی دلخواهی نیست، بلکه یک هموار جایی است که هدف ویژه‌ای را برآورد، مثلاً، یک «جاپایی»[4] مفروضِ $h : N \times [0,1] \to M$ را به‌روی خودش ببرد (هر h_t یک نشاندن است): $H_t \circ h_0 = h_t$.



1. flow 2. diffeotopies 3. diffeomorphism 4. isotopy

این مسأله منجر به مسألهٔ پیدا کردن یک میدان برداری روی $M \times [o, 1]$ می‌شود که (مانند مثال (۳)ی فوق) «روی» $\frac{\partial}{\partial t}$ قرارگرفته و (مانند مثال (۱) فوق) توسط این جاپایی بر زیر خمینهٔ $\bigcup_{t\in[o,1]} h_t(N)\times t$ پیشاپیش مشخص شده است.



برای وقوف بر جزییات، مثلاً به‌مرجع [۳] بخش ۹ رجوع شود.

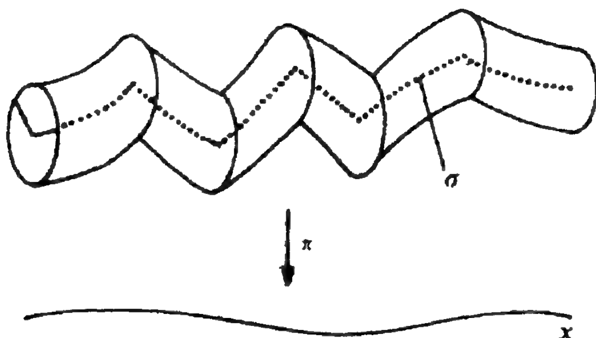
روی هم رفته، کسی که در توپولوژی دیفرانسیل کار می‌کند، اگر از افرازهای واحد کمک نگیرد، به‌کلّی مستأصل خواهد شد، زیرا بسیاری از هموار ریختیهایی که در توپولوژی دیفرانسیل به‌کار می‌روند، تقریباً همیشه با انتگرالگیری میدانهای برداری به‌دست می‌آیند، و میدانهای برداری تقریباً همیشه به‌کمک ساختمانهای موضعی (آنالیز) و افرازهای واحد (توپولوژی) تأمین می‌شوند.

مثال ۴. فرض کنیم E یک کلاف برداری بر یک فضای تولوژیک X باشد. برای مقاطع در کلاف برداری $^*(E \otimes E)$ (یعنی صورتهای دو خطی روی تارهای E)، ویژگی متقارن و مثبتِ معیّن[1] بودن، یک ویژگی محدب است. بدین‌طریق «متریکهای ریمانی» را روی کلافهای برداری، و به‌ویژه روی کلافهای مماسی TM («خمینه‌های ریمانی»)، به‌دست می‌آوریم.

مثال ۵. گیریم E کلافی برداری روی X با یک متریک ریمانی بر هر تارِ آن باشد. فرض کنیم $\varepsilon > o$ و $\sigma : X \to E$ یک مقطع معیّن باشد. برای مقاطع E، ویژگیِ ماندن در داخل «εـ لوله»[2] حول σ، یک ویژگی محدب است:

---

1. symmetric and positive definite 2. ε-tube



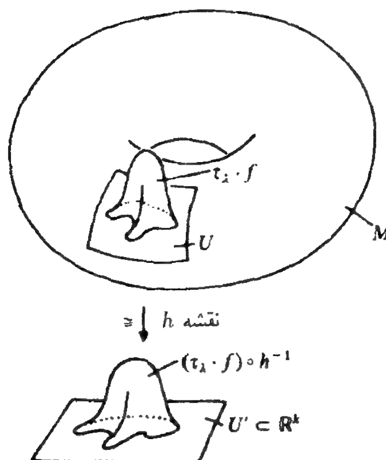
اینجا نیز پیداکردن مقطعی که فقط در لوله بماند، مطرح نیست، زیرا σ خود یکی از آنهاست و در وهلهٔ اول به‌این مسأله جواب می‌دهد، بلکه نکتهٔ اصلی پیداکردن مقاطعی اضافی با ویژگیهای «بهتر» از σ است، که σ را با «کمتر از ε» تقریب بزنند.

*

هرچند مثالهای فوق، نمونه‌های خاصّی از کاربردهای افراز واحدند، ولی تصویری که عرضه می‌کنند نیاز به تصحیح دارد و من باید اندکی آن‌را جرح و تعدیل کنم. مطلب اوّل این که نباید تصور کنید ما همیشه فقط به صِرفِ این دلیل که نقشه‌ای در مقابل خود داریم، در «حالت موضعی» هستیم. البته در مواردی (مانند مثال (۴)) چنین است، اما در حالت کلی، «نظریهٔ موضعی» فقط می‌گوید که هر نقطه یک همسایگی (احتمالاً بسیار کوچک) دارد که در آن یک جواب موضعی وجود دارد. در این‌صورت، حتی در حالت ساده‌ای که X خود یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^k$ است و E نیز چیزی جز $X \times \mathbb{R}^n$ نیست، افرازهای واحد ابزارهایی ضروری هستند. مثلاً، نظریهٔ تکینگی[1]، غالباً به‌چنین موقعیتی می‌انجامد.

مطلب دوم: ساختن اشیاء سراسری[2] از روی داده‌های موضعی، بدون شک هدف عمدهٔ افرازهای واحد است. امّا، ممکن است آنها را برای خُرد کردن اشیاء سراسری موجود به‌کار بریم، تا با به‌دست آوردن اشیاء موضعی، به محاسبات عملیتر و شدنی‌تری برسیم. مثلاً، اگر $M \subset \mathbb{R}^n$ یک زیرخمینهٔ kـ بعدی فشرده باشد، و $f : M \to \mathbb{R}$ مثلاً یک تابع پیوسته، آنگاه انتگرال $\int_M f dV$ را می‌توان با انتخاب یک افراز واحد وابسته به یک اطلس متناهی تعریف و سپس بررسی کرد. با این کار، هر انتگرال خاص $\int_M \tau_\lambda f dV$ (با استفاده از نقشه‌ها) به انتگرال چندگانهٔ معمولی در $\mathbb{R}^n$ باز می‌گردد:

1. singularity theory 2. global objects



(دستوری که در این مورد به‌کار می‌رود چنین است:

$$\int_M \tau_\lambda f dV = \int_{\mathbb{R}^k} (\tau_\lambda f) h^{-1} . \sqrt{g} dx_1 \cdots dx_n$$

که g دترمینان صورت بنیادیِ متریک (g_{ij}) است). گام نهایی آن‌است که همهٔ آنها را به‌کمک دستور

$$\int_M f dV = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_M \tau_\lambda f dV$$

جمع کنیم.

سومین و آخرین مطلب آنکه، افرازهای واحد فقط به‌خاطر توابع و مقاطع در کلافهای برداری مطرح نمی‌شوند، بلکه هدفهای خیلی ظریفتر دیگری را نیز برآورده می‌کنند. به‌عنوان مثال، رجوع کنید به مقالهٔ «افرازهای واحد در نظریهٔ تاربندی» مرجع [۶][1] .

۵. پیرافشردگی

فقط با اندکی تأمل، باز می‌خواهیم از یکی دیگر از مفاهیم توپولوژیک، یعنی مفهوم پیرافشردگی[2] صحبت کنیم. آه که این مفاهیم چقدر زیادند! یک A را B گوییم هرگاه برای هر C یک Dیی موجود باشد که در E صدق کند ـ این مطالب در آغاز کاملاً ملال‌آور هستند و مادامی که به مفادّ آنها پی نبرده‌ایم، تا وقتی حکمت وضع آنها را درنیافته‌ایم، این ملال همچنان ادامه خواهد داشت. تعریف‌کردن یک ویژگی غیرجالب، سپس تعریف ویژگی دوم که آن‌هم غیرجالب است، فقط برای آنکه بگوییم ویژگی غیرجالب

1. A. Dold, *Partitions of unity in the theory of fibrations*; Ann. of Math., 78 (1963), 223-255

2. paracompactness

اوّل مستلزم ویژگی غیرجالب دوم است، ولی نمونهٔ غیرجالبی هست که در ویژگی غیرجالب دوم صدق می‌کند اما در اولی صدق نمی‌کند ــ آه خدای من! هیچ‌گاه معرّفی یک مفهوم در ریاضیات تصادفی یا از روی هوس نبوده است: نخست، معنای آن موردنظر بوده است، و سپس هدف وسیله را آفریده است.

البته من هم مانند هر شخص دیگری می‌دانم که در آموزش دانشگاهی، دست به‌سر کردن دانشجویان با یک کلمهٔ «بعداً»، کاملاً اجتناب‌ناپذیر است و غالباً پیش می‌آید. باید معرفت فنی و صوری به‌سطحی برسد، که بتوانیم راجع به‌معنای اشیاء به‌طور شایسته، یعنی بدون گذاردن انگیزه‌های ساده ولی نادرست به‌جای انگیزه‌های صحیح ولی پیچیده، صحبت کنیم. اما عبارت «به‌حد لزوم صوری بودن» در ریاضی به‌معنای خیلی صوری بودن است، و اشیاء را نباید بیش از این صوری نمود. اگر از کسی خواسته شود که بیش از حدِّ لزوم در راه هدفهای مجهول، جذب مقدّمات شود، سرانجام علاقه‌اش را به دانستن چه بودِ هدفها در مرحلهٔ اوّل، از دست می‌دهد. و من متأسفم که باید بگویم بسیاری از دانشجویان از دانشگاههای ما فارغ‌التحصیل می‌شوند بی‌آنکه کانون اصلی و گرمابخش مشعل فروزان ریاضیّات را در جایی دیده باشند، و از آن بدتر: بی‌آنکه به‌وجود چنین کانون اصلی باور داشته باشند. ــ اما گویا دارم بیش از حد از موضوع بحث منحرف می‌شوم.

تعریف (پیرافشرده). یک فضای هاوسدورف X را پیرافشرده[1] گویند هرگاه هر پوشش باز آن یک زیرپوشش موضعاً متناهی[2] داشته باشد، به‌این معنی که برای هر پوشش باز X چون $\mathfrak{A}$، یک پوشش باز $\mathfrak{B} = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از X وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\mathfrak{B}$ موضعاً متناهی باشد، یعنی هر $x \in X$ یک همسایگی داشته باشد که V_λها را فقط برای تعدادی متناهی از λها قطع کند؛ و

(۲) $\mathfrak{B}$ یک تظریف $\mathfrak{A}$ باشد، یعنی هر V_λ در یکی از مجموعه‌های عضو $\mathfrak{A}$ قرار داشته باشد.

این، به‌اصطلاح، همان «وضعیت ملال‌آور» این مفهوم است. با وجود این، بلافاصله توجه را جلب می‌کند، زیرا قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه. یک فضای هاوسدورف، پیرافشرده است اگر و تنها اگر این ویژگی ظریف را داشته باشد که هر پوشش بازِ آن پذیرای یک افراز واحد وابسته به خود باشد.

اثبات در یک جهت بیمایه است: اگر $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک افراز واحد وابسته به $\mathfrak{A}$ باشد، آنگاه مجموعهٔ V_λها با ضابطهٔ .

1. paracompact 2. locally finite

$$V_\lambda := \{x \in X | \tau_\lambda(x) \neq o\}$$

یک تظریف موضعاً متناهیِ $\mathfrak{A}$ خواهد بود. برهان در جهت عکس، یعنی اثبات آنکه هر فضای پیرافشرده، «ویژگی افراز واحد» را دارد، پایان بخشِ این بخش و این فصل خواهد بود. اما، پیش از پرداختن به اثبات، می‌خواهم به‌پرسشی که آشکارا مطرح است پاسخ دهم، و آن این‌است: این قضیه به چه درد می‌خورد؟ چرا این مفهوم را با خودِ حکمِ قضیه تعریف نمی‌کنیم؟ مگر نه این‌است که کل مطلب به دارابودن افرازهای واحد خلاصه می‌شود؟ امّا، دقیقاً به‌این دلیل که ویژگی افراز واحد بسیار شگفت‌انگیز است، دلمان می‌خواهد که بتوانیم و هرچه بیشتر ممکن است، فضاهایی واجد این ویژگی را شناسایی کنیم و این هم به‌کمک قضیه بهتر از تعریف مستقیم صورت می‌گیرد. مثلاً، هر فضای فشردهٔ هاوسدورف بالبداهه یک فضای پیرافشرده است، اما آیا بی‌درنگ دیده می‌شود که در ویژگی افراز واحد نیز صدق می‌کند؟ نه، فقط با استفاده از قضیهٔ فوق، این مطلب آشکار می‌شود. نکتهٔ زیر، که بدون اثبات عرضه می‌شود، نشان می‌دهد که پیرافشردگی یک ویژگی «عام» برای دستهٔ وسیعی از فضاهاست.

نکته. اگر فضای هاوسدورفی، موضعاً فشرده باشد، یعنی هر همسایگی آن شامل یک همسایگی فشرده باشد، و به‌علاوه اگر این فضا اجتماع تعداد شمارایی از زیرفضاهای فشرده باشد (که به‌موجب فشردگیِ موضعی، مثلاً برای فضاهای شمارای نوع دوم، صادق است)، آنگاه پیرافشرده است.

نتیجه. خمینه‌ها، به‌ویژه $\mathbb{R}^n$، پیرافشرده‌اند.

نکته. حاصلضرب یک فضای پیرافشرده در یک فضای هاوسدورف فشرده، فضایی است پیرافشرده.

قضیه (استون[1]). هر فضای متریکپذیر پیرافشرده است.

به‌ویژه، همهٔ زیرفضاهای فضاهای متری، پیرافشرده‌اند، زیرا آنها نیز متریکپذیرند، و این فوق‌العاده جالب است زیرا، در حالت کلی، زیرفضاهای بسته پیرافشردگی را به ارث می‌برند (به‌همان دلیل که برای فضاهای فشرده گفته شد)، اما برای زیرفضاهای دلخواه، ویژگی پیرافشردگی موروثی نیست.

قضیه (میازاکی[2]). هر مجتمع ضَشمَب پیرافشرده است.

1. Stone 2. Miyazaki

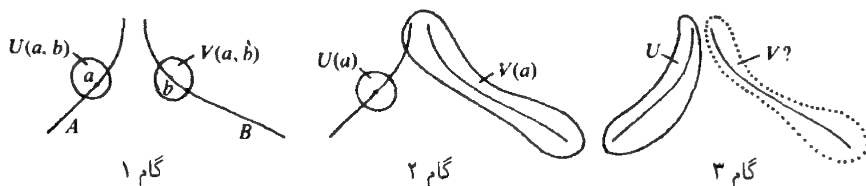
برای اثبات قضیهٔ اخیر، به مرجع [۵] و برای قضیه‌های دیگر، مثلاً به‌مرجع [۱۶]، فصل ۱ بخشهای ۸. ۵ و ۸. ۷، رجوع کنید. استدلالها را می‌توان بدون اشکال خواند.

اکنون، مطابق وعده، بپردازیم به‌اثبات آنکه در یک فضای پیرافشرده، هر پوشش باز، یک افراز واحد وابسته به خود دارد. برهان از دو قسمت تشکیل می‌شود:

قسمت (۱): لم. در هر فضای پیرافشرده، لم‌اوریسون را می‌توان به‌کار برد، یعنی هر دو زیرمجموعهٔ بستهٔ جدا از هم را می‌توان با همسایگیهای باز از یکدیگر جدا کرد.

قسمت (۲) : ساختن افرازهای واحد به‌کمک لم‌اوریسون.

برهانِ قسمت (۱). فرض کنیم A و B زیرفضاهای بسته‌ای جدا از هم در فضای پیرافشردهٔ X باشند: برای هر دو نقطهٔ $a \in A$ و $b \in B$، همسایگیهای باز جداگری چون $U(a,b)$ و $V(a,b)$ انتخاب می‌کنیم. حال a را ثابت نگاه داشته، وسعی می‌کنیم که a و b را با همسایگیهای بازی چون $U(a)$ و $V(a)$



گام ۱ گام ۲ گام ۳

از یکدیگر جدا کنیم. برای این کار، یک تظریف موضعاً متناهی برای پوشش باز، متشکل در مجموعه‌های $\{V(a,b)\}_{b\in B}$ و $X\backslash B$ را در نظر می‌گیریم، و $V(a)$ را به‌عنوان اجتماع کلیهٔ مجموعه‌های این تظریف که مشمول در یکی از $V(a,b)$ها، با قید $b \in B$، هستند، تعریف می‌کنیم. به‌موجب متناهیِ موضعی بودن، یک همسایگی باز a وجود دارد که فقط تعدادی متناهی از مجموعه‌های تظریف فوق را قطع می‌کند. چنانچه مجموعه‌های قطع‌شده در $V(a,b_1) \cup \cdots \cup V(a,b_r)$ قرار داشته باشند، کافی است اشتراک این همسایگی a را با $U(a,b_1) \cap \cdots \cap U(a,b_r)$ را در نظر بگیریم تا یک همسایگی $U(a)$ برای a جدا از $V(a)$ به‌دست آید.

بعد به‌جای آنکه a را ثابت نگهداریم، مانند بالا، یک تظریفِ موضعاً متناهی برای پوشش باز متشکل از مجموعه‌های $\{U(a)\}_{a\in A}$ و $X\backslash A$ انتخاب می‌کنیم و U را به‌عنوان اجتماع کلیهٔ مجموعه‌های این تظریف که در $U(a)$، $a \in A$، قرار دارند، تعریف می‌کنیم. اکنون فقط نیاز داریم که برای هر $b \in B$، یک همسایگی بازی بیابیم که U را قطع نکند: اجتماع آنها همان Vی مطلوب خواهد بود. در هر حال، b یک همسایگی باز دارد که فقط تعدادی متناهی از آن مجموعه‌های تظریف را، که اجتماعشان طبق

تعریف برابر U است، قطع می‌کند. فرض کنیم این تعداد متناهی مجموعه، در مجموعهٔ

$$U(a_1) \cup \cdots \cup U(a_s)$$

قرار داشته باشند. در این‌صورت، اشتراک این همسایگیِ نقطهٔ b و

$$V(a_1) \cap \cdots \cap V(a_s)$$

همان همسایگیِ مطلوب جدا از U است. همان چیزی که برای اثبات (۱) می‌خواستیم.

برهانِ قسمت (۲). فرض کنیم $\mathfrak{A} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ پوششِ بازی برای X باشد، که با توجه به (۱)، بی‌آنکه خللی در کلیت پدید آید، می‌توانیم آن‌را موضعاً متناهی بگیریم. برای آنکه یک افراز واحد وابسته به‌این پوشش را بیابیم، نخست اندکی U_λ را «بهم می‌فشاریم»، یعنی یک پوشش باز $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ پیدا می‌کنیم به‌گونه‌ای که $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$. زیرا، فرض کنید که این کار ممکن باشد: در این‌صورت، با استفاده از لم‌اوریسون، یک $\sigma_\lambda : X \to [o, 1]$ انتخاب می‌کنیم به‌قسمی‌که $\sigma_\lambda|\overline{V}_\lambda \equiv 1$ و $\sigma_\lambda|X\backslash U_\lambda \equiv o$، و به‌این ترتیب یک خانوادهٔ موضعاً متناهی $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ به‌دست می‌آوریم؛ حاصلجمع $\sigma := \sum_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda$ همه‌جا پیوسته و مثبت است، و در نتیجه با قراردادن $\tau_\lambda := \sigma_\lambda/\sigma$، $\lambda \in \Lambda$، افراز واحد مطلوب به‌دست می‌آید.

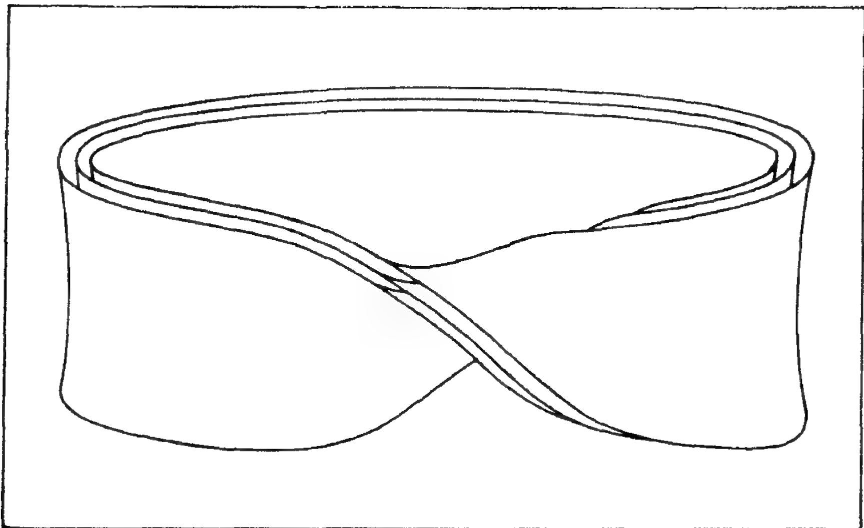
لذا، تنها چیزی که برای اثبات مانده این‌است که نشان دهیم این‌گونه «بهم فشردن» $\mathfrak{A}$ ممکن است. به‌ازای هر $x \in X$، یک همسایگی باز Y_x انتخاب می‌کنیم به‌گونه‌ای که $\overline{Y}_x$ تماماً در یکی از مجموعه‌های عضو $\mathfrak{A}$ واقع باشد. بنابر قسمت (۱)، این کار شدنی است، زیرا x و $X\backslash U_\lambda$ را به‌ازای $x \in U_\lambda$، می‌توان با همسایگیهای بازی از یکدیگر جدا کرد. فرض کنیم که $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک تظریف موضعاً متناهی برای $\{Y_x\}_{x\in X}$ بوده و V_λ اجتماع کلیهٔ W_αهایی باشد که بستارشان در U_λ قرار دارد. در این‌صورت، روشن است که $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ نیز یک پوشش باز است، و به‌علاوه $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$، زیرا: می‌گیریم $x \in \overline{V}_\lambda$. پس، هر همسایگیِ x، دست کم یکی‌از W_αها را که بستارش در U_λ باشد قطع می‌کند. اما، به‌علّت متناهی موضعی بودنِ $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$، یک همسایگی به‌قدرکافی کوچک فقط تعدادی متناهی از آنها، مثلاً W_{α_1}، $\cdots$، W_{α_r} را قطع می‌کند. در این‌صورت، الزاماً x در $\overline{W_{\alpha_1} \cup \cdots \cup W_{\alpha_r}}$ خواهد بود، وگرنه، یک همسایگی برای x وجود خواهد داشت که هیچ‌یک از W_αهایی را که بستارش در U_λ است، قطع نمی‌کند. بنابراین

$$x \in \overline{W_{\alpha_1} \cup \cdots \cup W_{\alpha_r}} = \overline{W}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \overline{W}_{\alpha_r} \subset U_\lambda$$

همان‌چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

۹

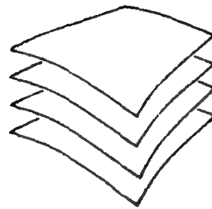
فضاهای پوششی

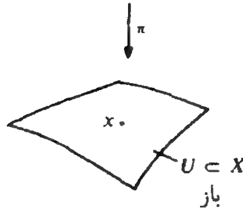


۱. فضاهای توپولوژیک بالای X

یک فضای پوششی[1] برای X، فضایی است مانند Y همراه با یک نگاشت پیوستهٔ پوشای $\pi : Y \to X$ («نگاشت پوششی[2]»)، که به‌طور موضعی، حول هرنقطهٔ «فضای پایه[3]»ی X اساساً مثل نگاشت متعارف از حاصلجمع جدا ازهم نسخه‌های یک فضا به‌روی نسخهٔ اصلی این فضاهاست:

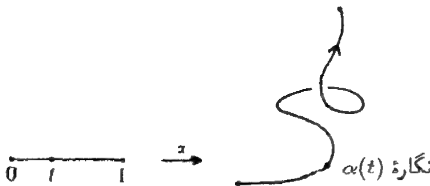
1. covering space 2. covering map 3. base space

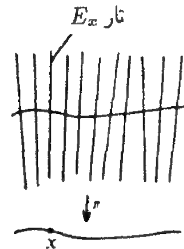




فعلاً همین‌قدر کافی است ـ تااینکه شما بتوانید شهود خود را درجهت درست به‌کار اندازید. تعریف دقیق را در بخش ۲ خواهیم آورد.

در شهود معمولیِ وابسته به‌یک نگاشتِ $f : A \to B$، A، شیء اوّلی است که براثر نگاشتِ f چیزی روی آن «رخ می‌دهد»: هرنقطهٔ $a \in A$ به‌یک نگارهٔ $f(a) \in B$ «نگاشته می‌شود». اما همچنین می‌توانستیم حوزهٔ عکس یعنی B را شیء نخست تصور و فکرکنیم که نگاشت $f : A \to B$ معرف یک خانوادهٔ $\{A_b\}_{b\in B}$ از «تارها[1] ی» $A_b := f^{-1}(b)$ روی B است. این دو شیوهٔ بیانِ یک نگاشت، یا نگریستن به‌آن، آشکارا کاملاً هم‌ارزند و انتخاب یکی یا دیگری فقط بستگی به‌آن دارد که در مرحلهٔ اوّل، این نگاشت را برای چه منظوری خواسته باشیم. مثلاً، به خمی به‌صورت $\alpha : [0, 1] \to X$، همه به‌شیوهٔ اوّل نگاه می‌کنند (یعنی در هرلحظهٔ t می‌دانند که نگاره درکجاست)؛ درحالی‌که، برای یک کلاف برداری $\pi : E \to X$، شیوهٔ دوم احساس کلی مناسبتری را تداعی می‌کند (یعنی برای هر $x \in X$، می‌دانیم تار متناظر آن یعنی E_x چیست).





و اما درمورد فضاهای پوششی، باز در حوزهٔ عکس است که چیزی «رخ می‌دهد» (که با چیزی پوشیده می‌شود)، و به همین دلیل می‌خواهم توجه شما را به‌این نحوهٔ نگریستن جلب کنم. برای این کار، از اصطلاح زیر استفاده می‌کنم.

---

1. fibers

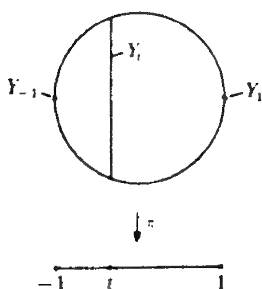
نامگذاری(«بالای»)[1]. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از یک فضای توپولوژیک بالای X[2] یک زوج (Y, π) متشکل از یک فضای توپولوژیک Y و یک نگاشت پیوستهٔ پوشای $\pi : Y \to X$ است. هرگاه ممکن باشد، π را از علامتگذاری حذف می‌کنیم، یعنی، اگر بیم ابهام نرود،

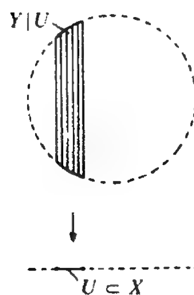
Y را به‌جای (Y, π)

Y_x را به‌جای $\pi^{-1}(x)$ («تار بالای x»)

$Y|U$ را به‌جای $(\pi^{-1}(U), \pi|\pi^{-1}(U))$ («تحدید Y به $U \subset X$») خواهیم نوشت.

مثال. تصویر بر محور xها، قرص D^2 را به یک فضای توپولوژی بالای $[-1, 1]$ تبدیل می‌کند. تارها، بازه‌ها یا نقاط (در ابتدا و انتها) هستند:





پس، در وهلهٔ اوّل، این کار اساساً راه دیگری برای ارجاع به نگاشتهای پیوستهٔ پوشاست. ولی دیدگاه ما در مطالعهٔ آنها در اینجا، هنگامی روشن خواهد شد که نشان دهیم چه‌وقت دو فضای توپولوژیک بالای X باید هم‌ارز تلقی شوند.

تعریف. دو فضای توپولوژیک Y و $\widetilde{Y}$ بالای X را همسانریخت بالای X، یا برای اختصار «یکریخت» گوییم (و می‌نویسیم $Y \cong \widetilde{Y}$)، هرگاه بین آنها یک همسانریختی $h : Y \to \widetilde{Y}$ «بالای X» موجود باشد، یعنی یک همسانریختی که نمودار زیر درمورد آن یک نمودارِ تعویضپذیر باشد.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & \widetilde{Y} \\ & {}_{\pi}\searrow \quad \swarrow_{\widetilde{\pi}} & \\ & X & \end{array}$$

---
1. over   2. topological space over X

باید توجّه کرد که در این‌صورت، الزاماً h تار Y_x را به‌طور همسان‌ریخت روی تار $\widetilde{Y}_x$ خواهد نگاشت.

اگر اصلهای موضوع محدودکنندهٔ دیگری نگذاریم، مفهوم فضای توپولوژیک بالای X بازهم خیلی کلی بوده و نمی‌تواند کاربردی جدّی داشته باشد. یک ردهٔ خصوصیتر از فضاهای توپولوژیک بالای X، که هنوز هم بس بزرگ ولی فعلاً جالب توجّه است، با افزودن شرط «بیمایگی موضعی[1] » به‌دست می‌آید:

تعریف (تاربندیهای بیمایه و بیمایهٔ موضعی). یک فضای توپولوژیک Y بالای X را بیمایه[2] نامند هرگاه یک فضای توپولوژیک F موجود باشد به قسمی که Y با

$$X \times F$$
$$\Big\downarrow \text{تصویر متعارف}$$
$$X$$

یکریخت باشد. یک فضای توپولوژیک Y بالای X را بیمایهٔ موضعی[3]، یا تاربندی بیمایهٔ موضعی[4] گویند اگر هر $x \in X$ یک همسایگی U داشته باشد به قسمی که Y بالای U، یعنی $Y|U$، بیمایه باشد.

اگر برای همسایگی Uیی از x، تحدید $Y|U$ بیمایه باشد، واضح است که در این‌صورت حتی رابطهٔ $Y|U \cong U \times Y_x$ برقرار است. اگر برای یک تاربندی بیمایهٔ موضعی همهٔ تارهای Y_x با یک فضای ثابت F همسان‌ریخت باشند، Y را یک تاربندی بیمایهٔ موضعی یا «تار نمونه[5] » ی F نامند. این محدودیت، آن‌قدرها که به‌نظر می‌رسد، قوی نیست: در یک تاربندی بیمایهٔ موضعی، همسان‌ریختیِ نوعیِ تارهای Y_x، آشکارا ثابتِ موضعی[6] است، و درنتیجه، اگر فضای پایهٔ X همبند باشد، ثابتِ سراسری[7] خواهد بود.

درمورد تاربندیهای بیمایهٔ موضعیِ Y بالای X با تارِ F، ارتباطی نزدیک، مثلاً بین گروههای مانسته‌جاییِ تار F، پایهٔ X و فضای کل Y («دنبالهٔ کامل مانسته‌جایی[8] »)، وجود دارد و بدین‌طریق می‌توان اطلاعاتی از ویژگیهای مانسته‌جاییِ یکی از این سه فضا را به کمک ویژگیهای دو فضای دیگر به‌دست آورد. (در واقع، بیمایگی موضعی شرط قویِ غیرلازمی برای کامل بودن دنبالهٔ مانسته‌جایی است؛ واژهٔ کلیدی، «تاربندیهای سِر[9] » است).

---

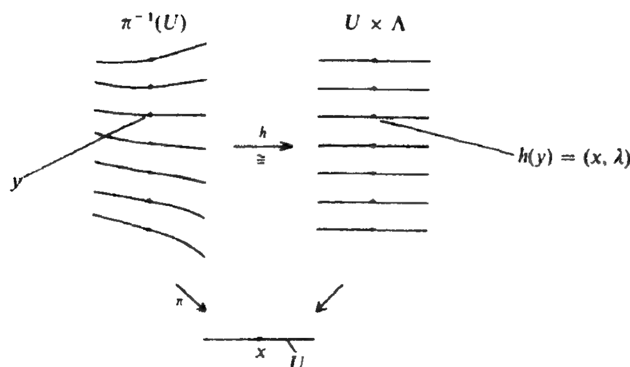
1. local triviality 2. trivial 3. locally trivial 4. locally trivial fibration
5. typical fiber 6. locally constant 7. globally constant
8. exact homotopy sequence 9. Serre fibrations

چند کلمه‌ای هم دربارهٔ اصطلاحات علمی: کلافهای تاری[1]، که اصلاً قصد نداریم آنها را در اینجا مورد بحث قرار دهیم، از جمله تاربندیهای بیمایهٔ موضعی «هستند»، اما یک کلاف تاری فقط یک تاربندی بیمایهٔ موضعی با ویژگیهای مخصوص نیست، بلکه علاوه بر اصول موضوعهٔ دیگر، این مفهوم شامل داده‌های اضافی دیگری نیز هست. مثلاً، در کلافهای برداری، می‌خواهیم که هر تار دارای یک ساختار فضای برداری (یک ساختار اضافی) باشد، و باید بتوانیم بیمایه‌سازیهای موضعی را روی تارها یکریخت خطی بگیریم (اصل موضوع اضافی).

۲. مفهوم فضای پوششی

تعریف (فضای پوششی). یک تاربندی بیمایهٔ موضعی را یک فضای پوششی گویند اگر همهٔ تارهای آن گسسته باشند.

بنابراین، یک نگاشت پیوستهٔ پوشای $\pi : Y \to X$، یک فضای پوششی است اگر برای هر $x \in X$ یک همسایگی باز چون U و یک فضای گسستهٔ Λ موجود باشند به قسمی که $Y|U$ و $U \times \Lambda$ بالای U همسانریخت باشند.



البته، می‌توان خودِ Λ را به‌عنوان تار برگزید، همان‌طور که در تاربندیهای بیمایهٔ موضعی همیشه چنین است.

عدد اصلیِ یک تار بالای x، یعنی $\#Y_x$، را چندگانگی[2] پوشش در نقطهٔ x نامند. روشن است که، چندگانگی ثابتِ موضعی است، و درنتیجه اگر X همبند باشد، ثابتِ سراسری نیز همبند خواهد بود. چنانچه چندگانگی مقداری ثابت و برابر n باشد، پوشش را پوششِ nـ برگی[3] خوانند.

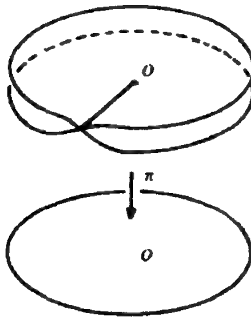
---

1. fiber bundles 2. multiplicity 3. n-fold covering

یک نگاشت پوششی $\pi : Y \to X$ همواره همسانریختِ موضعی[1] است، یعنی هرنقطهٔ $y \in Y$ یک همسایگی باز V دارد به قسمی که $\pi(V)$ در X باز و π معرّف یک همسانریختی $V \overset{\cong}{\to} \pi(V)$ است. البته به‌علّت گسستگی Λ، هر $U \times \{\lambda\}$ در $U \times \Lambda$ باز است، و تصویر متعارف $U \times \{\lambda\} \to U$ آشکارا یک همسانریختی است. لذا درموردی که نام برده شد، $V := h^{-1}(U \times \lambda)$ در $\pi^{-1}(U)$ و درنتیجه در Y باز خواهد بود، و بنابراین π مجموعهٔ V را به‌طور همسانریخت روی U می‌نگارد.

*

این مفهوم فضای پوششی یگانه مفهومی نیست که با این نام به‌کار می‌رود، بلکه ساده‌ترین آنهاست. به‌ویژه، در نظریهٔ توابع، به دلایلی «پوشش»های کلیتری را درنظر می‌گیرند، که حالت خاص آنها «پوششهای شاخه‌یی[2]»، از قبیل $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$ هستند:

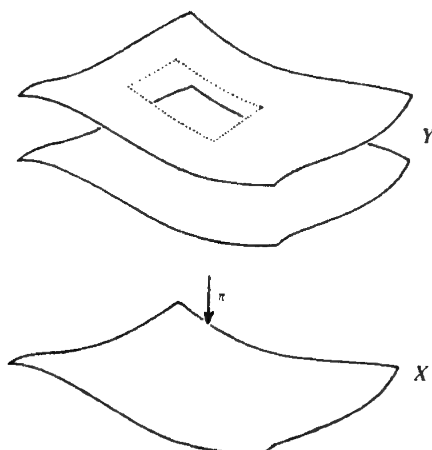


دراینجا به‌شرط بیمایگیِ موضعی نیازی نیست بلکه فقط پیوستگی، بازبودن (نگاره‌های مجموعه‌های باز، بازند) و گسستگی تارها مورد نیازند (مثلاً رجوع شود به مرجع [۹]، ص ۲۰ به‌بعد). نقاطی مانند y، که درآنها چنین نگاشتی همسانریخت موضعی نباشد، نقاط شاخه‌یی[3] نامیده می‌شوند. در مثال $z \mapsto z^2$ یگانه نقطهٔ شاخه‌یی نقطهٔ o است.

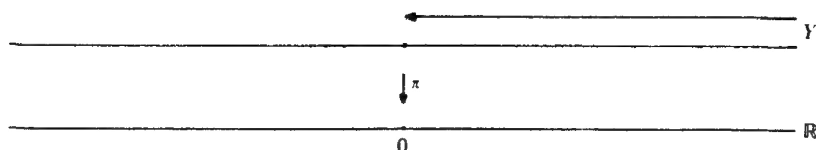
اما، حتی وقتی چنین پوشش «تعمیم یافته»ای (یعنی نگاشت پیوسته، باز، و گسسته‌ای) غیرشاخه‌یی (یعنی همه‌جا همسانریخت موضعی) و پوشا باشد، لزوماً یک فضای پوششی، به‌معنای تعریفی که آوردیم، نیست. به سهولت می‌توان مثالهایی از این دست را با برداشتن یک قطعهٔ بستهٔ مناسب از یک پوششِ «خوب» به‌دست آورد:

---

1. locally homeomorphic 2. branched coverings 3. branching points



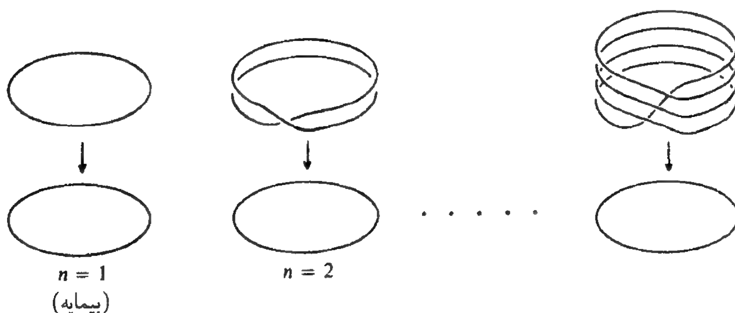
ساده‌ترین مثال، هنگامی به‌دست می‌آید که $Y = \mathbb{R} \times o \cup \{x \in \mathbb{R} | x > o\} \times ۱$ را همراه با تصویر متعارف $Y \to \mathbb{R}$ درنظر می‌گیریم: Y در نقطهٔ o موضعاً بیمایه نیست، تعداد برگها در طرف چپ برابر ۱ و در طرف راست برابر ۲ است.



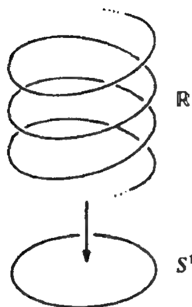
*

در خاتمه، چند مثال بسیار ساده اما غیربیمایه (به معنی فنی کلمه) می‌آوریم:

مثال ۱. برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۲$، نگاشت $z \mapsto z^n$ یک پوشش nـ برگی غیربیمایه $\mathbb{C}\backslash o \to \mathbb{C}\backslash o$ (و یا $S^۱ \to S^۱$) را به‌دست می‌دهد:



مثال ۲. نگاشت $S^۱ \to \mathbb{R}, e^{ix} \mapsto x$، معرّف پوششی است با تعدادی نامتناهی ـ شمارا برگ.

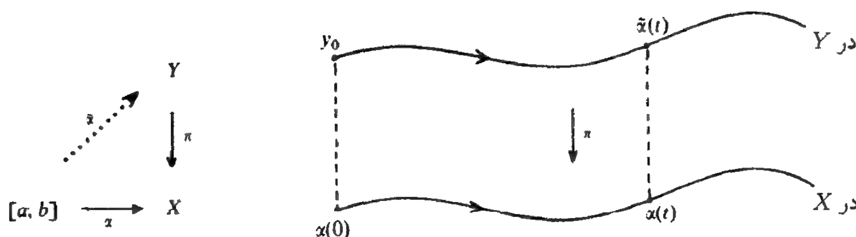


مثال ۳. تصویر متعارف $S^n \to \mathbb{RP}^n$ یک پوشش ۲ ـ برگی است.

راجع به خود مفهوم پوشش همین‌قدر کافی است. کاربردهای فضاهای پوششی را در بخش ۸ خواهم آورد. قسمت عمدهٔ این فصل به رده‌بندی فضاهای پوششی تخصیص داده می‌شود. آری، حق هم همین است، زیرا می‌توان یک بررسی کامل از همهٔ فضاهای پوششیِ یک فضای توپولوژیک مفروض X به عمل آورد، و این همان چیزی است که «نظریهٔ فضاهای پوششی» می‌نامیم، ـ نظریه‌ای هرچند مختصر، ولی مفید است. امّا در این نظریه، یک ابزار فنیِ همه‌جا حاضر وجود دارد، که همه چیز به کمک آن ساخته، اثبات و انجام می‌شود. این ابزار، بالابریِ راه است. این همان موضوعی است که اکنون می‌خواهیم از آن صحبت کنیم.

۳. بالابریِ راه

تعریف (بالابریِ راه)[1]. فرض کنیم $\pi : Y \to X$ یک نگاشت پوششی و $\alpha : [a, b] \to X$ یک نگاشت پیوسته (یعنی یک «راه») باشد. یک راهِ $\widetilde{\alpha} : [a, b] \to Y$ را یک بالابریِ α با شروع از y_o گوییم هرگاه $\widetilde{\alpha}(a) = y_o$ و $\pi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.

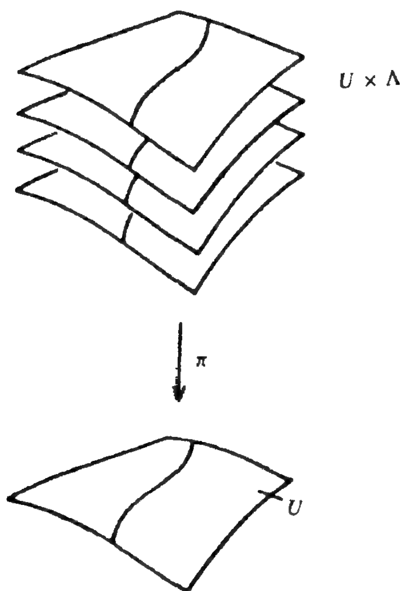


لم (وجود و یکتایی بالابریهای راه). اگر Y یک فضای پوششیِ X باشد، برای هر راه α در X و هر نقطهٔ $y_o \in Y$ بالای $\alpha(a)$، یک و تنها یک $\widetilde{\alpha}$ هست که بالابری α با شروع از y_o است.

برهان. چنانچه $U \subset X$ یک مجموعهٔ باز و $Y|U$ بیمایه باشد، به آسانی دیده می‌شود که همهٔ

1. path lifting

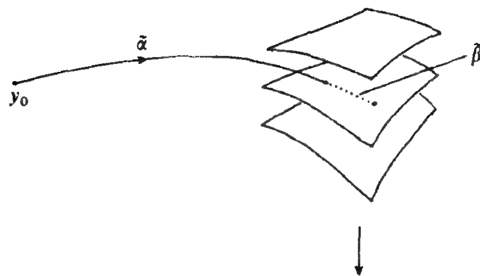
بالابریهای همهٔ راههای β که کلاً در U باشند دقیقاً چه هستند: نسبت به $Y|U \cong U \times \Lambda$، این بالابریها دقیقاً راههایی مانند $\widetilde{\beta}_\lambda$ در Y هستند که با ضابطهٔ $\widetilde{\beta}_\lambda(t) := (\beta(t), \lambda)$ تعریف می‌شوند.

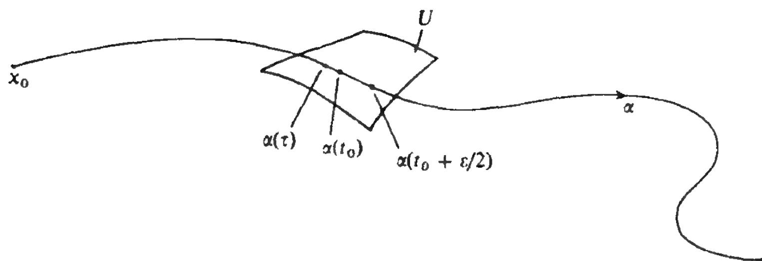


اکنون (بی‌آنکه از کلیت کاسته شود) فرض می‌کنیم α از $[o, ۱]$ به X مفروض و y_o بالای $\alpha(o)$ باشد.

یکتایی. فرض می‌کنیم $\widetilde{\alpha}$ و $\hat{\alpha}$ دو بالابری با شروع از y_o باشند. همان‌طورکه درمورد $Y|U$ استدلال شد، دو زیرمجموعه از $[o, ۱]$ که $\widetilde{\alpha}$ و $\hat{\alpha}$ در روی آنها به‌ترتیب برهم منطبق باشند یا نباشند هردو بازند، اما مجموعهٔ اولی چون شامل o است ناتهی است، درنتیجه، بنابر همبندیِ $[o, ۱]$، باید مساوی $[o, ۱]$ باشد.

وجود. مجموعهٔ اعضایی چون $\tau \in [o, ۱]$ که برای آنها یک بالابری $\alpha|[o, \tau]$ با شروع از y_o وجود دارد، مجموعه‌ای ناتهی است، زیرا شامل o است. کوچکترین کران بالای این مجموعه را t_o می‌نامیم. یک همسایگی باز U مانند $\alpha(t_o)$ و یک عدد $\varepsilon > o$ را چنان انتخاب می‌کنیم که Y بالای U بیمایه باشد و α کلّ مجموعهٔ $[t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon] \cap [o, ۱]$ را بتوی U بنگارد. فرض می‌کنیم $\widetilde{\alpha} : [o, \tau] \to Y$ یک بالابریِ $\alpha|[o, \tau]$ برای مقداری مثل $\tau \in [t_o - \varepsilon/۲, t_o] \cap [o, ۱]$ باشد، و $\widetilde{\beta}$ یک بالابریِ $\alpha|[\tau, t_o + \varepsilon/۲] \cap [o, ۱]$ با شروع از $\widetilde{\alpha}(\tau)$ باشد.





دراین‌صورت، باقرار دادن

$$\hat{\alpha}(t) := \begin{cases} \widetilde{\alpha}(t),\ t \in [o, \tau] \text{ برای} \\ \widetilde{\beta}(t),\ t \in [\tau, t_o + \varepsilon/۲] \cap [o, ۱] \text{ برای} \end{cases}$$

یک بالابریِ $\alpha|[o, b]$ با شروع از y_o تعریف خواهد شد، و به‌علاوه، b برابر با ۱ است (اگر $t_o = ۱$) که دراین‌حالت مسأله تمام است، و یا از t_o بزرگتر است. اما، بنابر تعریفِ t_o، حالت دوم ممکن نیست، و لذا $\hat{\alpha}$ همان بالابریِ مطلوبِ α است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

این لم پاسخگوی دوتا از بدیهیترین پرسشهای مربوط به بالابری راههاست. مهمترین مطلب دیگری که لازم است راجع به بالابری راهها بدانیم، «وابستگی پیوسته به پارامترهای اضافی» است. فرض کنید به‌جای یک راهِ تنها تمامی یک «خانواده» از راهها، یعنی یک مانسته‌جایی مانند

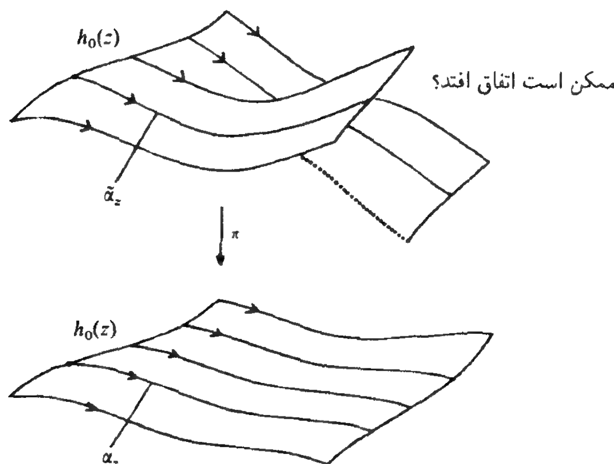
$$h : Z \times [o, ۱] \to X$$

و متناظراً به‌جای یک نقطهٔ شروع تنهای y_o بالای $\alpha(o)$، تمامی یک «نگاشت پیوسته از نقطهٔ شروع» بالای h_o مانند $\widetilde{h}_o : Z \to X$ با شرط $\pi \circ \widetilde{h}_o = h_o$ را به‌ما داده‌اند. حال، اگر برای هرمقدار ثابت

$z \in Z$ راهِ نظیر آن‌را بالا بریم تا به راه مورد بحث با شروع از $\widetilde{h}_o(z)$ برسیم، روی هم‌رفته یک نگاشت به‌شکل

$$\widetilde{h} : Z \times [o, 1] \to Y$$

بالای h به‌دست می‌آوریم. مسأله این‌است که آیا ممکن است $\widetilde{h}$ پیوسته نباشد:



نه، نمی‌تواند! برای اثبات، از نو باید یک کار دقیقی انجام دهیم، اما درعوض ابزار بسیار مفیدی برای نظریهٔ فضاهای پوششی به‌دست می‌آوریم.

لم (بالابریِ مانسته‌جاییها)[1]. فرض کنیم Y یک فضای پوششیِ X باشد، و Z یک فضای توپولوژیک دیگر، $h : Z \times [o, 1] \to X$ یک نگاشت پیوسته و

$$\widetilde{h}_o : Z \to Y$$

یک «بالابری» پیوستهٔ h_o باشد («بالابری مفروضی برای نگاشت نقطهٔ شروع»):

$$\begin{array}{ccc} Z \times 0 & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & Y \\ \downarrow & \overset{\tilde{h}}{\nearrow} & \downarrow \pi \\ Z \times [0,1] & \xrightarrow[h]{} & X \end{array}$$

1. lifting of homotopies

دراین‌صورت، نگاشت

$$\widetilde{h} : Z \times [o, ۱] \to Y$$
$$(z, t) \to \widetilde{\alpha}_z(t)$$

که از بالابریِ فرد فرد راههای $\alpha_z : [o, ۱] \to X$، $t \to h(z, t)$ با شروع از نقطهٔ $\widetilde{h}_o(z)$ به‌دست می‌آید، یک نگاشت پیوسته است.

برهان. برای اختصار، εـ همسایگیهای نقطهٔ t_o در $[o, ۱]$ به‌شکل $(t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon) \cap [o, ۱]$ را با $I_\varepsilon(t_o)$ نمایش می‌دهیم. یک جعبهٔ باز $\Omega \times I_\varepsilon(t_o)$ در $Z \times [o, ۱]$ را «کوچک» خوانیم، اگر h آن‌را در یک مجموعهٔ باز $U \subset X$ بنگارد به‌قسمی که $Y|U$ بیمایه باشد. حال اگر $\widetilde{h}$ روی یک «خط قائم» $\Omega \times t_۱$ از این جعبه، پیوسته باشد، در تمامی این جعبه پیوسته خواهد بود. درواقع، نسبت به‌یک بیمایه‌سازی

$$Y|U \cong U \times \Lambda$$

Λـ مختص نگاشت $\widetilde{h}|\Omega \times I_\varepsilon$ (که نکتهٔ مهم مورد بحث ماست، زیرا U مختصِ این نگاشت توسط h، که درهرحال پیوسته است، داده شده است) مستقل از t است، زیرا هریک از راههای بالا برده پیوسته است. ازآنجا که $\widetilde{h}$ بر $\Omega \times t_۱$ پیوسته است، باید بر همهٔ $\Omega \times I_\varepsilon$ پیوسته باشد. دراین مورد، خواهیم گفت که این جعبه نه‌تنها «کوچک» بلکه «خوب» نیز هست.

حال فرض کنیم که برای یک مقدار ثابت $z \in Z$، T مجموعهٔ $t \in [o, ۱]$ باشد به قسمی که یک جعبهٔ همسایگی کوچک و خوب $\Omega \times I_\varepsilon(t)$ موجود باشد، که اصلاً معنای این شرط پیوسته بودنِ $\widetilde{h}_t$ در یک همسایگی z است. دراین‌صورت، T آشکارا در $[o, ۱]$ باز است، و باتوجه به پیوستگیِ نگاشت نقطهٔ شروع $\widetilde{h}_o$، داریم $o \in T$. حال، تنها کافی است ثابت کنیم که T بسته نیز هست. زیرا دراین‌صورت، به استناد همبندی، خواهیم داشت $T = [o, ۱]$، و بالنتیجه، $\widetilde{h}$ همه‌جا پیوسته است. برای این کار فرض کنیم $t_o \in \bar{T}$. بنابر پیوستگی h، یک جعبهٔ «کوچک» $\Omega \times I_\varepsilon(t_o)$ حول نقطهٔ (z, t_o) وجود خواهد داشت، و چون $t_o \in \bar{T}$، یک $t_۱ \in I_\varepsilon(t_o) \cap T$ وجود خواهد داشت. پس، $\widetilde{h}_{t_۱}$ دریک همسایگی z مانند $\Omega_۱$ پیوسته خواهد بود، درنتیجه $\widetilde{h}$ در نیمهٔ $(\Omega \cap \Omega_۱) \times I_\varepsilon(t_o)$ پیوسته خواهد بود و از آنجا

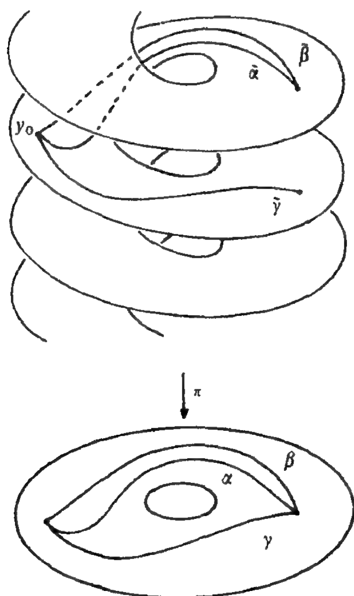
نتیجه می‌شود که $t_o \in T$. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

به‌عنوان نخستین فرع، به لمّ زیر توجه می‌کنیم.

لم تکراهی[1]. فرض کنیم Y یک فضای پوششی برای X، و α و β دو راهِ مانسته‌جا در X با ابتدا و انتهای ثابت باشند، یعنی یک مانسته‌جایی

$$h : [o, ۱] \times [o, ۱] \to X$$

بین $h_o = \alpha$ و $h_۱ = \beta$ با شرطهای $h_t(o) = \alpha(o)$ و $h_t(۱) = \alpha(۱)$ برای همهٔ tها، وجود داشته باشد. حال اگر $\widetilde{\alpha}$ و $\widetilde{\beta}$ بالابریهای α و β با یک نقطهٔ شروع y_o باشند، آنگاه نقطه‌های پایانی آنها نیز یکی خواهد بود: $\widetilde{\alpha}(۱) = \widetilde{\beta}(۱)$.



برهان. وقتی هریک از h_tها را به‌یک راه $\widetilde{h}_t$، که نقطهٔ شروعش y_o است بالا بریم، «نگاشت نقطهٔ انتها»، $t \to \widetilde{h}_t(۱)$، نگاشتی خواهد بود که t را بر تار بالای $\alpha(۱)$ می‌نگارد. البته این نکته را مستقل از این لم می‌دانستیم، زیرا $\pi \circ \widetilde{h}_t = h_t$. امّا، به‌موجب این لم، این نگاشت پیوسته، و لذا ثابت است، زیرا این تار، تاری است گسسته.□

1. monodromy lemma

۴. آشنایی با رده‌بندی فضاهای پوششی

یک فضای پوششی برای X در وهلهٔ نخست شیئی هندسی است که نمی‌توان آن‌را بی‌درنگ مطالعه کرد. چنانچه خواسته باشیم یک اطّلاع کلی، یعنی یک رده‌بندی از همهٔ فضاهای پوششی، داشته باشیم، ناچاریم در جستجوی «علائم مشخِّصه»ای برای پوششها باشیم، یعنی باید به هر پوشش، داده‌هایی وابسته کنیم، نوعی مشخِّصه یا نشانه‌ای که از لحاظ ریاضی، و درصورت امکان از لحاظ جبری، قابل دسترسی باشد، به‌گونه‌ای که دو فضای پوششی برای X یک مشخّصه داشته باشند اگر و تنها اگر یکریخت باشند. بدین‌ترتیب، رده‌بندی فضاهای پوششی باتقریبِ یکریختی، بدل به بررسی این مشخّصه‌ها می‌شود، که امیدواریم مسأله را ساده‌تر سازد.

بسیاری از مسائل رده‌بندیها در ریاضیات را بااستفاده از همین فکر مورد بحث قرار می‌دهند. نمونهٔ ساده‌ای که همهٔ شما دیده‌اید رده‌بندی صورتهای درجهٔ دوم در فضاهای برداری حقیقی n بعدی است. یک مشخصهٔ کاملاً واضح، یک «ناوردای یکریختی» برای صورتهای درجه دوم، رتبهٔ[1] آنهاست. اما رتبه به تنهایی نمی‌تواند ردهٔ یکریختی صورت درجه دوم را مشخص کند، بنابراین باید در جستجوی مشخّصه‌های دیگری نیز بود؛ یکی از این مشخصه‌ها، به‌عنوان مثال، نشان[2] صورت درجهٔ دوم یعنی تفاضل $p - q$ بین ابعاد ماکسیمال زیرفضاهایی است که‌این‌صورت در آنها به‌ترتیب مثبتِ معین و منفیِ معین است. (بدیهی است که از روی رتبهٔ $p + q$ و نشانِ $p - q$، می‌توان p و q را به‌دست آورد، و برعکس). بنابراین، قضیهٔ رده‌بندی چنین بیان می‌شود («قانون اینرسی سیلوستر»[3]): دو صورت درجهٔ دوم در V یکریخت‌اند اگر و تنها اگر رتبه و نشان آنها یکی باشند. بااین قضیه، مسألهٔ مطالعهٔ رده‌های یکریختی صورتهای درجهٔ دوم، بدل به مطالعهٔ همهٔ زوجهای مرتب ممکن اعداد (r, σ) می‌شود که به‌شکل رتبه و نشانِ یک صورت ظاهر می‌شوند، که این هم آشکارا مسألهٔ بسیار ساده‌تری است: این زوجهای ممکن، همهٔ زوجهایی هستند به‌شکل $(p + q, p - q)$ باشرط $o \leqslant p, q$ و $p + q \leqslant n$.

در رابطه با فضاهای پوششی مورد بحثِ ما، رفتار بالابری راهها[4]، علامت مشخصهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد. در اینجا، بحث خود را به فضاهای همبند ـ راه[5]، محدود می‌کنیم، و همچنین در هر فضا نقطهٔ ثابتی را (به‌عنوان «پایه نقطه»[6]) درنظر می‌گیریم. البته، فرض می‌شود که نگاشتهای پوششی، پایه نقطه‌ها را حفظ می‌کنند، و برای نشان دادن این نکته می‌نویسیم:

$$\pi : (Y, y_o) \to (X, x_o)$$

شرط همبند ـ راهی[7]، محدودیتی آن‌چنان اساسیْ برای هدفهای ما در نظریهٔ فضاهای پوششی به

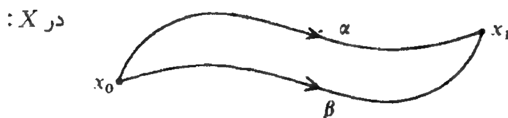
---

1. rank 2. signature 3. Sylvester's law of inertia
4. path-lifting behavior 5. path-connected 6. basepoint
7. path-connectedness

حساب نمی‌آید، واستفاده از علامتگذاری فوق برای نقطه‌پایه‌ها نیز به هیچ‌وجه آسیبی به محتوای ریاضی این نظریه نمی‌رساند.

حال گوییم دوفضای پوششی (Y, y_o) و (Y', y'_o) برای فضای (X, x_o) هردو یک رفتار بالابری دارند هرگاه برای هردو راه α و β از نقطهٔ x_o به نقطهٔ دیگری چون x_1، حکم زیر برقرار باشد: دو راه بالا برده شدهٔ $\widetilde{\alpha}$ و $\widetilde{\beta}$ در Y به نقطهٔ مشترکی ختم می‌شوند اگر و تنها اگر دو راه بالا برده شدهٔ $\widetilde{\alpha}'$ و $\widetilde{\beta}'$ در Y' با شروع از y'_o، نیز به نقطهٔ مشترکی ختم شوند.

در X :



و امّا، چنانچه قرارباشد نقش این رفتار بالابری برای فضاهای پوششی مشابه نقش رتبه و نشان برای صورتهای درجهٔ دوم باشد، دو مسألهٔ کاملاً متفاوت مطرح می‌شوند که باید به آنها پاسخ داد:

مسألهٔ (الف) یک فضای پوششی تاچه حد از روی رفتار بالابریش مشخص می‌شود؟

مسألهٔ (ب) چگونه می‌توان از لحاظ جبری به رفتار بالابری، «پی‌برد»؟

در دو بخش آتی، به‌این پرسشها پاسخ داده خواهد شد. امّا ابتدا می‌خواهم، شاید با احتیاط غیرضروری، اصلی راکه جواب براساس آن نهاده شده مطرح نمایم، لذا خود را درگیر جزئیات نمی‌کنم.

برای مسألهٔ (الف). بدیهی است که فضاهای پوششیِ یکریخت، یک رفتار بالابری دارند؛ مسأله این‌است که آیا عکس آن نیز صحیح است؟

رفتار بالابری، تکلیف قابلیت بالابری[1] نگاشتهایِ پیوستهٔ

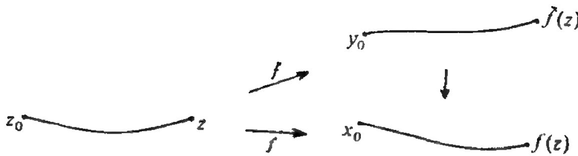
$$f : (Z, z_o) \to (X, x_o)$$

از فضاهای همبند ـ راه Z را به طریق زیر تعیین می‌کند: اولاً اگریک بالابری $\widetilde{f}$ وجود داشته باشد، آنگاه، البته به‌ازای هرراه α از z_o به z، راه $\widetilde{f} \circ \alpha$ یک بالابریِ راهِ $f \circ \alpha$ با شروع از y_o خواهد بود، و به‌این

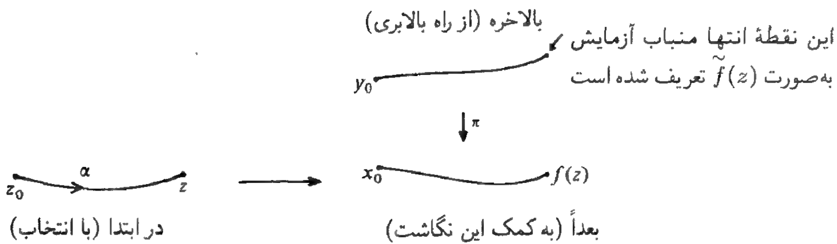
$$\begin{array}{ccc} & & (Y, y_0) \\ & \overset{\widetilde{f}}{\nearrow} & \downarrow \pi \\ (Z, z_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

ترتیب، $\widetilde{f}(z)$ نقطهٔ انتهای بالابریِ $f \circ \alpha$ است که از y_o شروع می‌شود:

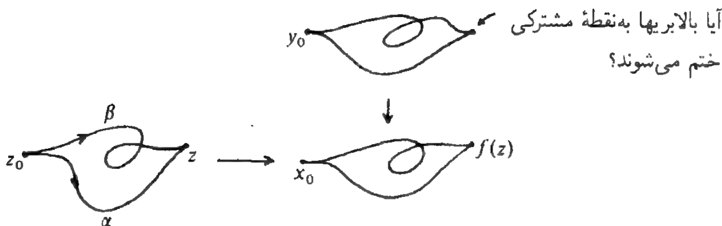
1. liftability



نکتهٔ بعدی این‌است که از یکتاییِ بالابریهای راهها نتیجه می‌شود که برای یک f مفروض، حداکثر یک بالابری $\tilde{f}$ با شرط $\tilde{f}(z_o) = y_o$ وجود دارد. و اما، هم‌اکنون می‌بینیم که با دردست داشتن یکی از این fها، چگونه می‌توان بااستفاده از بالابری راهها، یک چنین $\tilde{f}$ی را ساخت: به‌ازای $z \in Z$، یک راه α از z_o به $z \in Z$ انتخاب می‌کنیم و نگارهٔ آن‌را به‌دست می‌آوریم، سپس آن‌را بالا می‌بریم و نقطهٔ انتهای این بالابری را مساوی $\tilde{f}(z)$ می‌گیریم.

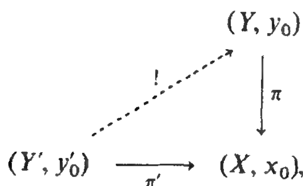


اکنون مسألهٔ «خوشتعریفی» به‌میان می‌آید: آیا این $\tilde{f}(z)$ که بدین شیوه تعریف شده، مستقل از انتخابِ α است؟

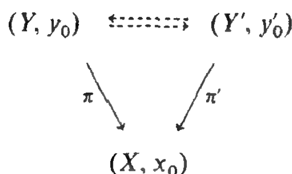


برای آنکه ویژگی فوق برقرار باشد، باید برای هردو راهِ α و β که از z_o آغاز و به نقطهٔ مشترکی منتهی می‌شوند، بالابریهای $f \circ \alpha$ و $f \circ \beta$ که از y_o شروع می‌شوند، الزاماً به نقطهٔ مشترکی نیز ختم گردند. برقراری این شرط، که آشکارا شرط لازم برای وجود $\tilde{f}$ است، درواقع، نتیجهٔ رفتار این بالابری است و خواهیم دید (بخش ۵، ملاک قابلیت بالابری) که همین شرط تحت فرضهایی مناسب، شرط کافی برای وجود یک بالابریِ پیوستهٔ $\tilde{f}$ است. در حالت خاصی که دو نگاشت مفروض، نگاشتهای پوششی

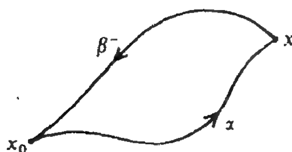
با یک رفتار بالابری باشند، روشن است که این «ملاک» برقرار است:



یک استفادهٔ دیگر از این استدلال، یعنی مرتبط کردن دو فضای پوششی، یکریختیهای بین این فضاها را که وارون یکدیگرند، به‌ما می‌دهد:



برای مسألهٔ (ب). فرض کنیم α و β دو راه از x_0 به x باشند. بالابریهای آنها، $\widetilde{\alpha}$ و $\widetilde{\beta}$، با شروع از y_0 بدیهی است که یک نقطهٔ انتهایی مشترک دارند اگر و تنها اگر، بالابریِ راهِ بستهٔ $\alpha\beta^-$ با شروع از y_0، خود نیز یک راهِ بسته، و یا یک طوقه[1] ، باشد. بدین‌ترتیب، برای پی‌بردن به رفتار بالابری، تنها چیزی که لازم داریم این است که بدانیم کدام یک از طوقه‌هایی را که از x_0 گذاشته‌اند، می‌توان به طوقه‌هایی که از y_0 می‌گذرند، بالا برد، وکدام یک را نمی‌توان.



$$\alpha\beta^- : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

به‌موجب لم تکراهی، این مطلب فقط بستگی به ردهٔ مانسته‌جایی (با ابتدا و انتهای ثابت منطبق بر x_0) دارد. اما مجموعهٔ رده‌های مانسته‌جاییِ طوقه‌های گذرنده بر x_0، به‌شیوهٔ متعارف، تشکیل یک گروه می‌دهند، که اصطلاحاً به‌گروه بنیادی[2] $\pi_1(X, x_0)$ نامیده می‌شود، و زیرمجموعهٔ رده‌های طوقه‌هایی که می‌توانند به طوقه‌های دیگری بالا برده شوند، تشکیل یک زیرگروه $G(Y, y_0)$ از $\pi_1(X, x_0)$ را می‌دهند. پس، شناخت رفتار بالابری، به معنی شناخت این زیرگروه است: این زیرگروه، همان «مشخّصه»ی جبری است که به فضای پوششی وابسته می‌کنیم. ازاین‌رو، رده‌بندی فضاهای پوششی ازسویی متضمّن قضیهٔ

1. loop 2. fundamental group

یکتایی است، که در مسألهٔ (الف) نام بردیم، و می‌گوید که: دو فضای پوششی یکریخت‌اند اگر و تنها اگر یک رفتار بالابری، و درنتیجه یک گروه G داشته باشند؛ و ازسوی دیگر، متضمّن یک قضیهٔ وجودی است، که باید به فکر تنظیم صورت آن باشیم، و مشخص خواهد کرد که با دردست داشتن یک زیرگروه $G \subset \pi_1(X, x_o)$، تحت چه شرایطی واقعاً یک فضای پوششی که در شرط $G(Y, y_o) = G$ صدق کند، موجود است. برنامه‌ای که در اینجا مطرح شد، مفصلاً در بخشهای ۵ و ۶ تشریح خواهد شد.

۵. گروه بنیادی و رفتار بالابری

تعریف (رستهٔ فضاهای «پایه نقطه»دار[1]). منظور از یک فضای پایه نقطه‌دار، یک زوج (X, x_o) متشکل از یک فضای توپولوژیک X و یک نقطهٔ $x_o \in X$ است. یک نگاشت پیوستهٔ حافظ پایه نقطه، $f : (X, x_o) \to (Y, y_o)$، چنانچه از نامش پیداست، نگاشتی است پیوسته چون $f : X \to Y$ با شرطِ $f(x_o) = y_o$. به‌ویژه، منظور از یک نگاشت پوششی $\pi : (Y, y_o) \to (X, x_o)$، نگاشتی است پوششی چون $\pi : Y \to X$ با شرط $\pi(y_o) = x_o$.

تعریف (گروه بنیادی). فرض می‌کنیم (X, x_o) یک فضای پایه نقطه‌دار باشد، مجموعهٔ راههایی در X را که از x_o شروع و به x_o ختم می‌شوند (مجموعهٔ «طوقه‌ها در x_o») با نماد $\Omega(X, x_o)$ نمایش می‌دهیم، و فرض می‌کنیم که نگاشت

$$\Omega \times \Omega \to \Omega, (\alpha, \beta) \to \alpha\beta$$

نگاشت مرکب با ضابطه‌های:

$$\alpha\beta(t) := \alpha(2t), o \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ برای}$$

$$\alpha\beta(t) := \beta(2t - 1), \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ برای}$$

باشد. دراین‌صورت، روی مجموعهٔ رده‌های مانسته‌جاییِ

$$\pi_1(X, x_o) := \Omega(X, x_o)/ \simeq$$

(نماد $\simeq$ معرّف مانسته‌جایی بانقاط انتهایی[2] ثابت x_o است)، یک قانون ترکیب خوشتعریفی با ضابطهٔ $[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$ وجود داردکه $\pi_1(X, x_o)$ را به‌یک‌گروه بدل می‌کند. این گروه را گروه بنیادی فضای

---

1. category of spaces with basepoint 2. endpoints

پایه نقطه‌دار (X, x_o) می‌نامند.

از اثبات مراحل مختلف و لازم برای توجیه احکام فوق (خوشتعریفی نگاشت ترکیب، شرکتپذیری، وجود 1 ووارون) که خیلی ساده‌اند، می‌گذرم. خواننده‌ای که تاکنون با مانسته‌جایی راهها تماسی نداشته و اکنون می‌خواهد چگونگی کار آنها را بداند، می‌تواند به صفحات ۷۸ تا ۸۸ مرجع [۱۲] مراجعه کند.

نمادگذاری. بدیهی است که ساختمان فوق، به طریق متعارف، عملاً یک تابعگون هموردای π_1، از رستهٔ فضاهای پایه نقطه‌دار و نگاشتهای پیوستهٔ حافظ پایه نقطه، به رستهٔ گروهها و همریختیها، یعنی

$$\pi_1 f : \pi_1(X, x_o) \to \pi_1(Y, y_o), [\alpha] \to [f \circ \alpha]$$

به‌ما می‌دهد. ولی ما به‌جای $\pi_1 f$، نمادگذاری متداول f_* را به‌کار خواهیم برد.

فرعِ لم تکراهی (رفتارگروه بنیادی نسبت به نگاشتهای پوششی). اگر $\pi : (Y, y_o) \to (X, x_o)$ نگاشتی پوششی باشد، همریختی گروه القایی $\pi_* : \pi_1(Y, y_o) \to \pi_1(X, x_o)$ یک همریختی یک‌به‌یک بین گروههای بنیادی است.

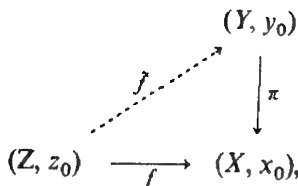
برهان. فرض می‌کنیم $\pi_*[\gamma] = 1 \in \pi_1(X, x_o)$. دراین‌صورت، یک مانسته‌جایی h با مبدأ و منتهای ثابت x_o بین $\pi \circ \gamma$ و نگاشت ثابت $[o, 1] \to \{x_o\}$ وجود دارد. حال h را به‌یک مانسته‌جایی $\widetilde{h}$ با مبدأ و منتهای ثابت y_o بالا می‌بریم، و دراین‌صورت داریم $\widetilde{h}_o = \gamma$ و $\widetilde{h}_1$ یک بالابری راه ثابت، و درنتیجه ثابت است. پس $[\gamma] = 1 \in \pi_1(Y, y_o)$. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

تعریف (گروه مشخّصهٔ یک فضای پوششی)[1]. فرض کنیم $\pi : (Y, y_o) \to (X, x_o)$ یک نگاشت پوششی باشد. دراین‌صورت، نگارهٔ همریختی یک‌به‌یک $\pi_* : \pi_1(Y, y_o) \to \pi_1(X, x_o)$ را زیرگروه مشخصهٔ[2] این پوشش گویند و با نماد $G(Y, y_o) \subset \pi_1(X, x_o)$ نمایش می‌دهند.

وقتی می‌گوییم یک طوقه در x_o به‌یک طوقه در y_o بالابردنی[3] است، منظور این‌است که این طوقه تصویرِ طوقه‌ای در y_o است. ازاین‌رو، گروه $G(Y, y_o) \subset \pi_1(X, x_o)$ همان زیرگروهی است که در بخش قبل اعلام کردیم، و گفتیم که حاوی کلیهٔ اطلاعات راجع به رفتار بالابری این پوشش است.

حال اگر $f : (Z, z_o) \to (X, x_o)$ پیوسته و $\widetilde{f} : (Z, z_o) \to (Y, y_o)$ یک بالابریِ f، یعنی $\pi \circ \widetilde{f} = f$، باشد

1. characteristic group 2. characteristic subgroup 3. liftable



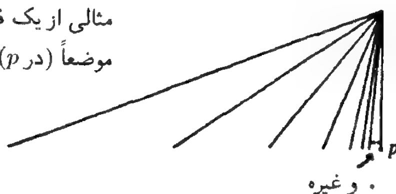
بدیهی است که خواهیم داشت

$$f_*\pi_1(Z, z_o) = \pi_*(\widetilde{f}_*\pi_1(Z, z_o)) \subset \pi_*\pi_1(Y, y_o) = G(Y, y_o)$$

و معنی آن این‌است که شرط $f_*\pi_1(Z, z_o) \subset G(Y, y_o)$ شرطی لازم برای قابلیت بالابری یک نگاشت مفروض $f : (Z, z_o) \to (X, x_o)$ است. برای آنکه بتوانیم بیان کنیم که تا چه حدّ این شرط، شرط کافی نیز هست، باید باز هم نخست یک مفهوم دیگر همبندی را بیاوریم، و آن این‌است:

تعریف(همبند ـ راه موضعی). یک فضای توپولوژیک را همبند ـ راهِ موضعی[1] گوییم اگر هر همسایگی شامل یک همسایگی همبند ـ راه باشد.

توجه. خمینه‌ها، همبندراهِ موضعی هستند (روشن است)، و مجتمعهای ضُثمُث نیز چنین‌اند. قضیهٔ کلیتر دراین زمینه را می‌توانید در مرجع [۱۶]، فصل ۳، بخش ۶.۳ ملاحظه کنید.



نکته. در فضای همبند ـ راه، هر همسایگی Vی یک نقطهٔ p عملاً شامل یک زیرهمسایگی همبند ـ راه باز است، نمونهٔ آن مجموعهٔ همهٔ $x \in V$هایی هستند که می‌توانند از یک راه در V، با شروع از p، به x برسند.

اکنون می‌توان ملاک زیر را بیان کرد.

ملاک قابلیت بالابری.[2] فرض می‌کنیم که $\pi : (Y, y_o) \to (X, x_o)$ یک نگاشت پوششی باشد، Z یک فضای همبند ـ راه و همبند ـ راه موضعی، و $f : (Z, z_o) \to (X, x_o)$ نگاشتی پیوسته

1. locally path-connected 2. liftability criterion

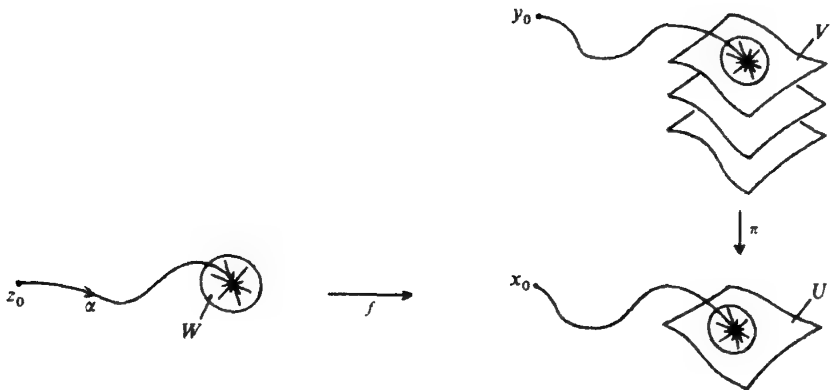
باشد. دراین‌صورت، یک بالابری $\tilde{f}\ :\ (Z, z_o) \to (Y, y_o)$ برای f وجود دارد (که یکتا نیز هست)، اگر و تنها اگر f_* گروه بنیادی $\pi_1(Z, z_o)$ را به زیرگروه مشخصهٔ این پوشش یعنی $G(Y, y_o) \subset \pi_1(X, x_o)$ ببرد:

$$\begin{array}{c} \pi_1(Y, y_0) \\ \cong \big\downarrow \pi_* \\ \pi_1(Z, z_0) \to G(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0). \end{array}$$

ضمناً، قبل از ذکر برهان ملاک، خاطر نشان می‌سازیم که در اینجا با مثال ساده‌ای از آنچه قبلاً در فصل ۵ بخش ۷، «دومین دلیل مهم برای فایدهٔ مفهوم مانسته‌جایی» نامیده بودیم (← ص ۹۷) مواجهیم: این مسألهٔ هندسی، حل شدنی است اگر و تنها اگر مسألهٔ جبری نظیر آن، که از اِعمال تابعگون گروه بنیادی π_1 دراین مورد حاصل می‌شود، حل شدنی باشد. یک بالابری $\tilde{f}$ برای f موجود است اگر و تنها اگر f_* به‌یک همریختیِ گروهیِ φ بالابردنی باشد:

$$\begin{array}{ccc} & & (Y, y_0) \\ & \overset{\exists \tilde{f}}{\nearrow} & \big\downarrow \pi \\ (Z, z_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \pi_1(Y, y_0) \\ & \overset{\exists \varphi}{\nearrow} & \big\downarrow \pi_* \\ \pi_1(Z, z_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

برهان. روشن است که این شرط لازم است، و باتوجه به همبند ـ راهی Z و یکتایی بالابریهای راهها، حداکثر یک $\tilde{f}$ وجود دارد. حال فرض کنیم که f در این شرط صدق کند. برای $z \in Z$، همان‌طوری که در بخش ۴ شرح دادیم، $\tilde{f}(z)$ را چنین تعریف می‌کنیم: یک راه α از z_o به z می‌گیریم، سپس $f \circ \alpha$ را بالا می‌بریم، تا به راهی به ابتدای y_o برسیم، سپس $\tilde{f}(z)$ را به‌عنوان انتهای این راه در Y انتخاب می‌کنیم. این نقطهٔ انتهایی، مستقل از انتخاب α است، زیرا اگر β راه دیگری از z_o به z باشد، طوقهٔ $(f \circ \alpha)(f \circ \beta)^-$ معرّف یک عضو $G(Y, y_o)$ خواهد بود و درنتیجه می‌تواند به‌یک طوقه در Y بالا برده شود. لذا، بالابریهای $f \circ \alpha$ و $f \circ \beta$ به نقطهٔ مشترکی ختم می‌شوند، که دقیقاً همان نقطهٔ خوشتعریف $\tilde{f}(z)$ است. پس، بدیهی است که $\pi \circ \tilde{f} = f$، و تنها نکته‌ای که برای اثبات باقی می‌ماند، پیوسته بودن $\tilde{f}$ است. در اینجا، پایِ همبند ـ راهیِ موضعیِ Z به‌میان می‌آید:



فرض‌کنیم $z_1 \in Z$ و V یک همسایگی بازِ $\tilde{f}(z_1)$ در Y باشد. بی‌آنکه ازکلیت‌کاسته شود، می‌توان V را آن‌قدرکوچک فرض‌کردکه $\pi|V$ یک همسانریختی به‌روی مجموعهٔ باز $U := \pi(V)$ باشد. حال، یک همسایگی همبند ـ راه وکوچک W برای z_1 چنان انتخاب می‌کنیم که $f(W) \subset U$. برای آنکه z_o را به نقاط $w \in W$ وصل کنیم، یک راه α از z_o به z_1 را درنظر می‌گیریم و سپس با «تکه راههای» کوچکی که کاملاً در W قرار دارند، z_1 را به w وصل می‌کنیم، و این راهها را به α می‌افزاییم. اکنون، واضح است‌که $\tilde{f}|W = (\pi|V)^{-1} \circ f|W$، و به‌ویژه $\tilde{f}(W) \subset V$، همان چیزی‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم. $\square$

۶. رده‌بندی فضاهای پوششی

قضیهٔ یکتایی. فرض‌کنیم Y و Y' فضاهای همبند ـ راه و همبند ـ راه موضعی باشند، و (Y, y_o) و (Y', y'_o) فضاهای پوششی پایه نقطه‌دار برای (X, x_o). یک یکریختی حافظ پایه نقطه بین این فضاهای پوششی وجود دارد اگر و تنها اگر، زیرگروه مشخصهٔ آنها یکی باشد، یعنی

$$G(Y, y_o) = G(Y', y'_o) \subset \pi_1(X, x_o)$$

برهان. لزوم شرط واضح است: اگر $\varphi : (Y, y_o) \to (Y', y'_o)$ چنین یکریختی باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} G(Y, y_o) = \pi_* \pi_1(Y, y_o) = (\pi' \circ \varphi)_* \pi_1(Y, y_o) = \pi'_*(\varphi_* \pi_1(Y, y_o)) \\ = \pi'_* \pi_1(Y', y'_o) = G(Y', y'_o) \end{aligned}$$

برعکس، اگر این شرط برقرار باشد، آنگاه بنابر ملاک قابلیت بالابری، می‌توان تصویر هر یک از پوششها

را به روی تصویر دیگری بالا برد:

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_0) & \dashleftarrow\dashrightarrow & (Y', y'_0) \\ & \pi \searrow \quad \swarrow \pi' & \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

و دراین‌صورت، ترکیب این بالابریها، همان بالابریهای π و π' به خود آنها خواهد بود و درنتیجه، بنابر یکتایی بالابریها، به‌ترتیب، منطبق بر نگاشتهای همانی Y و Y' خواهند شد. همان چیزی‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم. □

قضیهٔ وجود؟ در قضیهٔ یکتایی، فرض‌کرده بودیم‌که فضاهای پوششی، و درنتیجه فضای پایهٔ X، همبند ـ راه و همبند ـ راهِ موضعی هستند. لذا از حالا به‌بعد، مسألهٔ وجود را به‌شکل زیر مطرح می‌کنیم: فرض می‌کنیم (X, x_o) یک فضای همبند ـ راه و همبند ـ راه موضعی باشد و $G \subset \pi_1(X, x_o)$ یک زیرگروه دلخواه ازگروه بنیادی آن. مسأله این‌است: آیا یک فضای پوششی همبند ـ راه (Y, y_o) برای (X, x_o) وجود داردکه در شرط $G(Y, y_o) = G$ صدق کند؟ (ویژگی همبند ـ راهِ موضعی به هرصورت، از X به Y منتقل می‌شود). حکم فوق با چنین کلیتی صادق نیست. به‌چه دلیل؟ آیا فرضهای دیگری دربارهٔ فضای X یا دربارهٔ G باید افزود؟ و چه فرضهایی باید باشند؟

به‌جای آنکه مستقیماً خود قضیه را بیان کنم، باز ترجیح می‌دهم روش استقرایی را در ارائهٔ آن پیش گیرم. این روش بسیار آموزنده، ولی متأسفانه بیش ازحد وقتگیر است و نمی‌شود همیشه آن‌را به‌کار برد. دراین روش، یعنی شبیه‌سازی موقعیت، که مشخصهٔ زندگی یک ریاضیدان است، نه‌تنها به فکر اثبات یک قضیه باید بود، بلکه در وهلهٔ نخست باید خود قضیه را پیداکرد.

نخستین مراحل یک قضیه، معمولاً ازیک رشته خواستهایی ترکیب می‌شوند که، پس از آشنایی کافی باموضوع، به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند. هنگام تلاش در اثبات احکام مطلوب، مشکلاتی راکه ظاهر می‌شوند تجزیه و تحلیل و سعی می‌کنیم آنها را، بااستفاده از فرضهای جدیدی که می‌کوشیم تا آنجاکه ممکن است جزئی باشند، از میان برداریم، سپس قضایا پدید می‌آیند. درمورد مسألهٔ ما، مثلاً، می‌خواهیم همواره یک فضای پوششی موجود باشدکه زیرگروه مشخصه‌اش زیرگروه مفروض G باشد. حال سعی می‌کنیم آن‌را ثابت‌کنیم!

برهان قضیهٔ وجودیی که هنوز پیدا نکرده‌ایم. نخست باید Y را به‌عنوان یک مجموعه پدید آوریم. اگر قبلاً یک نگاشت پوششی $(Y, y_o) \to (X, x_o)$، آن‌طورکه می‌خواستیم، می‌داشتیم، نقاط متعلق به Y_x را چگونه می‌توانستیم به‌کمک اشیائی که برحسب (X, x_o) و G قابل بیان بودند، مشخص کنیم؟ معلوم است، که به‌ازای هر راه α از x_o به x، یک نقطهٔ کاملاً مشخّص از تار Y_x بالای x، یعنی نقطهٔ انتهایی بالابرِ α که از y_o شروع می‌شود، نظیر خواهد شد. همهٔ نقاط Y_x از این طریق به‌دست می‌آیند، و دو راه α و β نقطهٔ مشترکی را در Y_x معیّن می‌کنند اگر و تنها اگر $\alpha\beta^-$ یک عضو G را مشخص کند. حال اگر باز Y وجود نداشته باشد، برای پدید آوردن آن چه روشی باید اتخاذ کرد؟ چنان‌که در ذیل می‌آید:

تعریف. فرض کنیم که $\Omega(X, x_o, x)$ مجموعهٔ همهٔ راهها از x_o به x باشد. دراین مجموعه، یک رابطهٔ هم‌ارزی بانماد $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \sim \beta :\Leftrightarrow [\alpha\beta^-] \in G$$

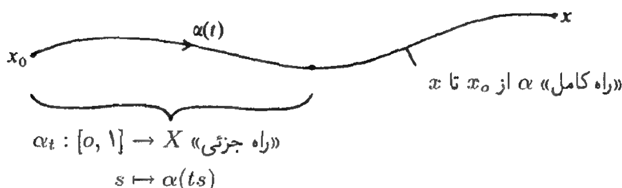
سپس مجموعه‌های Y_x و Y را به‌صورت:

$$Y_x := \Omega(X, x_o, x)/\sim,$$
$$Y := \bigcup_{x \in X} Y_x$$

تعریف، و به‌علاوه فرض می‌کنیم y_o ردهٔ هم‌ارزی راه ثابتی در $\Omega(X, x_o, x_o)$ باشد، و $\pi : Y \to X$ با ضابطهٔ $Y_x \to \{x\}$ معین شود. پس، به‌هرحال، π یک نگاشت پوشا بین مجموعه‌هاست و داریم $\pi(y_o) = x_o$.

بنابراین، «تنها» کاری که اکنون باید انجام دهیم این‌است که Y را به‌یک توپولوژی مجهز کنیم که از آن یک فضای همبند ـ راه بسازد و $(Y, y_o) \to (X, x_o)$ را به‌یک نگاشت پوششی بدل نماید که در شرط $G(Y, y_o) = G$ صدق کند.

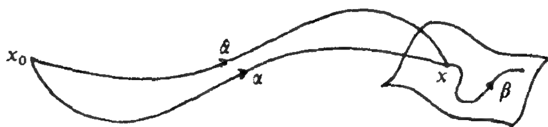
وقتی به شرایط هندسی آنچه که ساختیم فکر می‌کنیم، بی‌درنگ می‌بینیم که علاوه‌بر مجموعهٔ Y و نگاشت $\pi : (Y, y_o) \to (X, x_o)$، ابزار دیگری نیز قبلاً، در اختیار داشته‌ایم و آن بالابری راه است. برای $\alpha \in \Omega(X, x_o, x)$، رده‌های هم‌ارزی α را بانماد $[\alpha]_\sim$ نمایش می‌دهیم، تا باردهٔ مانسته‌جایی $[\alpha]$ اشتباه نشود. برای $t \in [0, 1]$، فرض می‌کنیم $\alpha_t \in \Omega(X, x_o, \alpha(t))$ بیانگر «راه جزیی» باشد که با ضابطهٔ $s \mapsto \alpha(ts)$ تعریف می‌شود.



احساس زیربنایی ساختمان فوق، طبیعتاً ناظر بر یک توپولوژی است که بالابری α برای آن، به‌کمک ضابطهٔ $\widetilde{\alpha}(t) := [\alpha_t]_\sim$، قبلاً داده شده است. اگر آن‌را دنبال کنیم، لاجرم خواهیم دید که باید کدام توپولوژی را روی Y تعریف نماییم. بدین‌منظور، نمادگذاری زیر را وارد می‌کنیم: به‌ازای یک راه α از x_0 به x و یک همسایگی بازِ همبند ـ راهِ U برای x، مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $[\alpha\beta]_\sim$ از راههای حاصل از ترکیب α با راههای βی واقع در U را که از x شروع می‌شوند، با $V(U, \alpha) \subset Y$ نشان می‌دهیم:



به‌علت همبند ـ راهیِ موضعیِ X، این Uها یک پایهٔ همسایگی برای x تشکیل می‌دهند و درنتیجه، بدیهی است که $V(U, \alpha)$ها یک پایهٔ همسایگی نقطهٔ $y \in Y$ برای توپولوژیی که می‌خواهیم انتخاب کنیم تشکیل می‌دهند. اما، پیش از آنکه این مطلب را در یک تعریف رسمی بگنجانیم، ملاحظه می‌کنیم که $V(U, \alpha)$ فقط به $y = [\alpha]$ و U بستگی دارد و نه به انتخاب راهِ نمایندهٔ α در ردهٔ $[\alpha]$:



از $\alpha \sim \hat{\alpha}$ نتیجه می‌شود که $[(\alpha\beta)(\hat{\alpha}\beta^-)] = [\alpha\beta\beta^-\hat{\alpha}^-] = [\alpha\hat{\alpha}^-] \in G$ ، و درنتیجه $[\alpha\beta]_\sim = [\hat{\alpha}\beta]_\sim$. به‌استناد این نابستگی به α، می‌توانیم به‌جای نماد $V(U, \alpha)$ از نماد $V(U, y)$ استفاده کنیم، که از این پس، این کار را خواهیم کرد. توجه داشته باشید که $\pi(V(U, y)) = U$.

تعریف. زیرمجموعهٔ $V \subset Y$ باز نامیده می‌شود هرگاه برای هر $y \in V$، یک همسایگی همبند ـ راه U از نقطهٔ $\pi(y)$ بتوان یافت به‌قسمی که $V(U, y) \subset V$.

لذا کاری که حالا ما باید انجام دهیم بررسی و درصورت لزوم، بااستفاده از فرضهای اضافیِ تا حدِّ ممکن ضعیف، تضمین برقراری احکام زیر است:

(الف) $\varnothing$ و Y بازند؛

(ب) اجتماعهای دلخواه مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بازند؛

(پ) اشتراکهای متناهی مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بازند؛

(ت) π پیوسته است؛

(ث) تارها گسسته‌اند؛

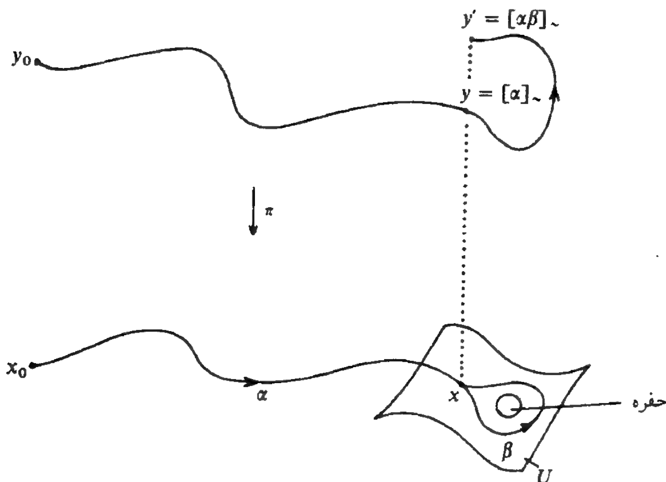
(ج) $\pi : Y \to X$ موضعاً بیمایه است؛

(چ) Y همبند ـ راه است؛

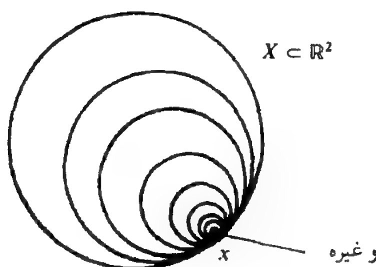
(ح) $G(Y, y_o) = G$.

شرایط (الف) تا (ت) بالبداهه برقرارند: درواقع، این یک توپولوژی و π پیوسته است. ضمناً مایلم در اینجا خاطر نشان سازم که در فهرست بالا هیچ چیز را «فروگذار نکرده‌ایم»: چنانچه یک فضای پوششی (Y', y'_o) با ویژگیهای مطلوب در ابتدا وجود داشته باشد، ساختمان ارائه شدهٔ ما نیز اجباراً ویژگیهای (ث) تا (ح) را خواهد داشت، زیرا به آسانی می‌توان یک همسانریختی بین (Y, y_o) و (Y', y'_o) بالای (X, x_o) برقرار کرد.

(ث) گسستگی تارها. گسستگی تارها هم‌ارز با این واقعیت است که برای هر $y \in Y_x$ یک همسایگی بازِ همبند ـ راه U برای x وجود دارد به قسمی که y تنها نقطهٔ $Y_x \cap V(U, y)$ است. ببینیم این یکتایی به چه مفهومی است؟ چنانچه $y = [\alpha]_\sim$، سایر نقاط $Y_x \cap V(U, y)$ دقیقاً به شکل $[\alpha\beta]_\sim$هایی خواهند بود که درآنها β یک طوقه در U بر پایهٔ x است. پس باید Uیی پیدا کنیم که برای همهٔ طوقه‌های βی این شکل، داشته باشیم $[\alpha\beta]_\sim = [\alpha]_\sim$.



و در اینجا کشتی ما به گل می‌نشیند و دیگر قادر به پیشروی نیستیم، زیرا بدون افزودن فرضهایی دربارهٔ X، دلیلی ندارد که ردهٔ مانسته‌جایی $[\alpha(\alpha\beta)^-]$ به گروه G تعلق داشته باشد. مثلاً، اگر به حالت $x = x_\circ$، ثابت $= \alpha$، و $G = \{1\}$ فکر کنیم، قاعدتاً در این حالت باید همه چیز درست از آب درآید: در این مورد شرط ما مستقیماً به معنای آن‌است که طوقهٔ β در X مانسته‌جا با صفر[1] است. اما لزومی ندارد که یک همسایگی U موجود باشد به‌گونه‌ای که همهٔ طوقه‌های واقع در U برپایهٔ x، در فضای پهناور X مانسته‌جا با صفر باشند:

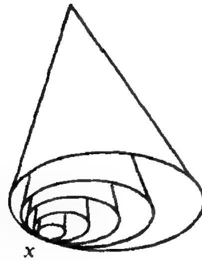


برای آنکه بتوانیم مجدداً به حرکت ادامه دهیم، اصلاً فرض می‌کنیم که X ویژگی مطلوب را دارد،ـ چارهٔ دیگری هم نداریم، زیرا بدون این فرض، قضیهٔ وجودی برای حالت $G = 1$ از اوّل غلط خواهد بود. پس:

تعریف. یک فضای توپولوژیک X را ساده ـ همبند نیمه موضعی[2] گویند اگر هر $x \in X$ یک همسایگی U داشته باشد به‌گونه‌ای که هر راه واقع در U و مبتنی بر x، در فضای X مانسته‌جا با صفر باشد.

دراین تعریف، شرط را نیمه موضعی خوانده‌ایم زیرا هرچند طوقه‌ها «موضعی» هستند، یعنی در U قرار دارند، اما مانسته‌جاییهای آنها با راه ثابت، سراسری هستند، بدین معنی که باید این مانسته‌جاییها در X صورت گیرند. بدیهی است که این ویژگی از U به زیرهمسایگیهایش نیز منتقل می‌شود. «ساده ـ همبندِ موضعی»[3] به طریق زیر تعریف می‌شود: هر همسایگی شامل یک زیرهمسایگی ساده ـ همبند است، یعنی شامل یک همسایگی V است به قسمی که همهٔ طوقه‌های واقع در V، در آن مانسته‌جا با صفرند. مخروطی که روی مثال فوق ساخته شود

1. null-homotopic 2. semi-locally simply connected
3. locally simply connected



ساده ـ همبند نیمه موضعی است، اما ساده ـ همبند موضعی نیست. ولی این خارج از موضوع است؛ مهمتر ازآن، این‌است:

ملاحظه. خمینه‌ها (به‌وضوح) و همچنین مجتمعهای ضَثمُث همیشه ساده ـ همبند نیمه موضعی (و حتی موضعی) هستند. رجوع شود به بخش ۶.۳، فصل ۳، مرجع [۱۶].

فرض اضافی. در ادامهٔ این بحث راجع به «برهان قضیهٔ وجودیی که هنوز پیدا نکرده‌ایم»، X را ساده ـ همبند نیمه موضعی فرض خواهیم کرد.

پس، برای Uهای بس کوچک، خواهیم داشت $Y_x \cap V(U,y) = \{y\}$، و ازآنجا گسستگی تارها نتیجه می‌شود، و اثبات (ث)، که می‌خواستیم، به پایان می‌رسد.

(ج) بیمایگی موضعی. فرض می‌کنیم $x \in X$ و U یک همسایگی بازِ ساده ـ همبند نقطهٔ x باشد به قسمی که هرطوقه در x درکل فضای X مانسته‌جا با صفر باشد. دراین‌صورت، بی‌درنگ می‌توان تحقیق کرد که برای هر $z \in V(U,y)$، تساوی $V(U,y) = V(U,z)$ برقرار است. به‌ازای $y \in Y_x$، $V(U,y)$ها مجموعه‌های باز دوبه‌دو جدا ازهم‌اند و $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{y\in Y_x} V(U,y)$. بنابراین، تصویر π و تناظر $V(U,y) \to \{y\}$ که برای $y \in Y_x$ خوشتعریف است، تواماً یک نگاشت دوسویی پیوسته $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Y_x$ بالای U را تعریف می‌کنند، که باید باز بودن آن‌را بیازماییم (یعنی تحقیق کنیم که مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز تبدیل می‌کند). برای این‌کار، کافی است تحقیق کنیم که خودِ تصویر، یک نگاشت باز است، که این نیز بسیار ساده است. مجموعه‌های $V(U,y)$، برای $y \in Y$ و مجموعه‌های باز همبند ـ راه $U \subset X$، یک پایه برای توپولوژی Y تشکیل می‌دهند. لذا فقط باید معلوم کنیم که $\pi(V(U,y))$ باز است. اما، این مجموعه برابر است با U. بنابراین، h باز است و $\pi : Y \to X$ درواقع بیمایهٔ موضعی است، اثبات (ج) تمام است.

(چ) همبند ـ راهیِ Y. اگر $Y = [\alpha]_\sim$، آنگاه $t \mapsto [\alpha_t]_\sim$ معرّف یک راه از $y_\circ$ به y است، که درآن $\alpha_t(s) := \alpha(st)$. اثبات (چ) نیز تمام است.

(ح) $G = G(Y, y_\circ)$. یک طوقهٔ α در $x_\circ$ معرّف عضوی از $G(Y,y_\circ)$ است، اگر و تنها اگر بتواند به‌یک طوقه در $y_\circ$ بالا برده شود. و اما (باتوجه به (چ))، خود این امر ممکن است اگر و تنها اگر

$[\alpha]_\sim = y_\circ$، یعنی $[x_\circ]_\sim = [\alpha]_\sim$، و لذا اگر و تنها اگر $[\alpha] \in G$ $[\alpha x_\circ] =$. اثبات (ح) هم تمام می‌شود، همان چیزی که می‌خواستیم.

بنابراین، باافزودن فقط یک فرض اضافی، راه را برای آنکه همه چیز برقرار شود، هموار و قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم:

قضیهٔ وجود. اگر X همبند ـ راه، همبند ـ راه موضعی، و همچنین ساده ـ همبند نیمه موضعی باشد، و اگر $G \subset \pi_1(X, x_\circ)$ یک زیرگروه دلخواه باشد، آنگاه یک فضای پوششی همبند ـ راه، و همبند ـ راه موضعی $(Y, y_\circ)$ برای $(X, x_\circ)$ موجود خواهد بود که در شرط $G(Y, y_\circ) = G$ صدق کند.

نکته. از لم تکراهی به‌وضوح نتیجه می‌شود که فضای Y در قضیهٔ فوق، ساده ـ همبند نیمه موضعی است.

۷. تبدیلات پوششی و پوشش عام

ملاک قابلیت بالابری و قضیه‌های وجود و یکتایی، مهمترین جزء نظریهٔ فضاهای پوششی را تشکیل می‌دهند. اکنون به ذکر برخی از نتایج مفید آن می‌پردازیم.

تعریف(تبدیل پوششی). منظور از یک تبدیل پوششی[1] ، یا تبدیل عرشه‌یی[2] ، برای یک نگاشت پوششی $\pi : Y \to X$، یک خودریختی ازاین پوشش است، یعنی یک همسانریختی $\varphi : Y \xrightarrow{\cong} Y$ بالای X:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & Y \\ & \searrow^{\pi} \quad {}^{\pi}\swarrow & \\ & X & \end{array}$$

تعویضپذیر است

واضح است که تبدیلات پوششی تشکیل یک گروه می‌دهند، که ما آن‌را با $\mathscr{D}$ نمایش می‌دهیم.

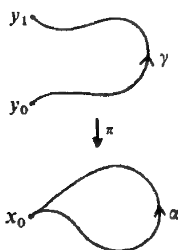
1. covering transformation 2. deck transformation

به‌عنوان یک نتیجهٔ بلافصلِ قضیهٔ یکتایی، داریم:

تبصره. فرض کنیم Y یک فضای پوششیِ همبند ـ راه و همبند ـ راه موضعی برای فضای X باشد و $y_o, y_1 \in Y$ نقاطی بالای x_o باشند. برای آنکه یک تبدیل پوششی $\varphi : Y \to Y$ با شرط $\varphi(y_o) = y_1$ (که البته φ یکتاست) وجود داشته باشد، لازم و کافی است که (Y, y_o) و (Y, y_1) دارای یک زیرگروه مشخصه در $\pi_1(X, x_o)$ باشند.

بالأخص، گروه تبدیلات پوششی آزادانه روی Y عمل می‌کند: یعنی فقط عضو همانی این گروه، نقاط ثابت دارد.

اما معنی شرط $G(Y, y_o) = G(Y, y_1)$ چیست؟ برای بررسی این موضوع، نگاهی به ارتباط بین $G(Y, y_o)$ و $G(Y, y_1)$ در حالت کلی، برای دو نقطهٔ y_o و y_1 بالای x_o، می‌اندازیم. فرض کنیم γ راهی در Y از y_o به y_1 باشد، و $\alpha := \pi \circ \gamma$ تصویر آن:



دراین‌صورت، یک نمودار تعویض‌پذیر از یکریختیهای گروهی داریم،

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow[\cong]{[\gamma^- \cdots \gamma]} & \pi_1(Y, y_1) \\ \cong \downarrow \pi_* & & \cong \downarrow \pi_* \\ G(Y, y_0) & \xrightarrow[{[\alpha]^{-1} \cdots [\alpha]}]{\cong} & G(Y, y_1). \end{array}$$

و لذا $G(Y, y_1) = [\alpha]^{-1} G(Y, y_o)[\alpha]$، که نتیجتاً معنای آن این است که تساوی $G(Y, y_o) = G(Y, y_1)$ برقرار است اگر و تنها اگر $[\alpha]$ در نرمالساز[1] زیرگروه $G(Y, y_o)$ در گروه $\pi_1(X, x_o)$ واقع باشد

یادآوری (از جبر). اگر B زیرگروهی از یک گروه A باشد، مجموعهٔ

$$N_B := \{a \in A | aBa^{-1} = B\}$$

1. normalizer

را نرمالساز B در A می‌نامند. این نرمالساز، خود یک زیرگروه A است، و روشن است که B در نرمالساز خود، نرمال است: $B \lhd N_B \subset A$؛ نرمالساز، به تعبیر ساده، بزرگترین گروه بین B و A است که B درآن نرمال است.

قضیه دربارهٔ گروه تبدیلات پوششی. فرض کنیم $(Y, y_o) \to (X, x_o)$ پوششی برای یک فضای همبند ـ راه و همبند ـ راه موضعی باشد، و $G := G(Y, y_o)$ زیرگروه مشخصهٔ آن، یعنی نگارهٔ همریختی یک‌به‌یک $\pi_1(Y, y_o) \to \pi_1(X, x_o)$ باشد که براثر تصویر القا شده است. دراین‌صورت، به‌ازای هر $[\alpha] \in N_G$ ازعضو نرمالساز G در $\pi_1(X, x_o)$، دقیقاً یک تبدیل پوششی $\varphi_{[\alpha]}$ وجود دارد که y_o را به منتهای $\widetilde{\alpha}(1)$، در بالابری α با شروع از y_o، می‌نگارد. به‌علاوه، به‌این طریق، یک نگاشت $N_G \to \mathscr{D}$ به‌دست می‌آوریم که درواقع معرّف یک یکریختی گروهی $N_G/G \xrightarrow{\cong} \mathscr{D}$ است.

اثبات قضیه را به‌عنوان تمرینی مطبوع توصیه می‌کنم، تا بدین‌وسیله بتوانید با مفاهیم متعدد جدیدی که دراین فصل آوردیم، بهتر آشنا شوید. فراموش نکنید که در فهرست احکام منفردی که باید ثابت شوند، دستور $\varphi_{[\alpha\beta]} = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}$ را بگنجانید. (دستور به همین شکلی که نوشته شده صحیح است، و نه در جهت عکس: بااینکه در $\alpha\beta$ نخست راه α و سپس راه β منظور می‌شود، در $\varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}$ نخست تبدیل پوششی $\varphi_{[\beta]}$ إعمال می‌شود).

فرع و تعریف(پوششهای نرمال). دریک پوشش همبند ـ راه و همبند ـ راه موضعیِ $Y \to X$، گروه تبدیلات پوششی به‌صورت ترایا [1] روی تارها عمل می‌کند (یعنی، به‌ازای هر دو نقطهٔ یک تار، یک تبدیل پوششی هست که یکی از دو نقطه را به دیگری می‌برد؛ و یا، به بیان دیگر، تارها، مدارهای عمل $\mathscr{D}$ بر Y هستند) اگر و تنها اگر، برای یک نقطهٔ $y_o \in Y$ (و درنتیجه برای هر نقطهٔ $y_o \in Y$)، گروه $G(Y, y_o)$ درگروه $\pi_1(X, x_o)$ نرمال باشد. این‌گونه پوششها را پوششهای نرمال [2] می‌نامند.

فرع. برای پوششهای نرمال $(Y, y_o) \to (X, x_o)$، ویژگیهای زیر برقرارند:

(i) $\mathscr{D} = \pi_1(X, x_o)/G(Y, y_o)$.

(ii) تعداد برگهای پوشش، بامرتبهٔ گروه $\mathscr{D}$ برابر است (زیرا تارها مدارهای عمل آزاد $\mathscr{D}$ هستند)، و لذا با مرتبهٔ π_1/G، که در نظریهٔ گروهها، «شاخص» [3] $G(Y, y_o)$ در $\pi_1(X, x_o)$ نامیده می‌شود، نیز برابر است.

1. transitively 2. normal coverings 3. index

(iii) نگاشت دوسویی از فضای مداری $Y/\mathscr{D}$ به روی X، که توسط تصویر $\pi : Y \to X$ تعریف می‌شود، درواقع یک همسانریختی است:

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \big\downarrow & \searrow^{\pi} & \\ Y/\mathscr{D} & \xrightarrow{\cong} & X \end{array}$$

(پیکان عمودی: تصویر متعارف)

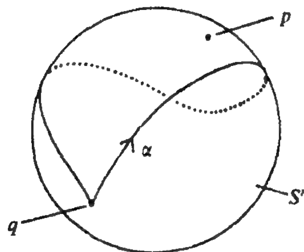
برهانِ (iii). پیوستگی این نگاشت، نتیجه‌ای است از فصل ۳، بخش ۲، نکتهٔ ۱. بازبودن آن نیز، نتیجهٔ این واقعیت است که نگاشت $\pi : Y \to X$ یک همسانریختی موضعی، و لذا باز است.

*

همهٔ این احکام در حالت خاص $G(Y, y_\circ) = \{1\}$، برقرارند، که هم اکنون به بررسی آن می‌پردازیم. ازآنجاکه $\pi_1(Y, y_\circ) \overset{\pi_*}{\cong} G(Y, y_\circ)$، این حالت اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر گروه بنیادی Y بیمایه باشد. یادآوری می‌کنیم که چنین فضاهایی را ساده ـ همبند می‌نامند:

تعریف (ساده ـ همبند). یک فضای همبند راه Y را ساده ـ همبند[1] نامند هرگاه برای یک (و لذا برای هر) $y_\circ \in Y$، گروه بنیادی $\pi_1(Y, y_\circ)$ بیمایه باشد.

پس، معنی این شرط این است که هرطوقه در Y مانسته‌جا با صفر است. روشن است که فضاهای انقباض‌پذیر[2]، ساده ـ همبندند. اما، مثلاً برای $n \geqslant 2$، کرهٔ S^n نیز ساده ـ همبند است. باکمال تعجّب، نمی‌توان گفت که این واقعیّت کاملاً آشکار است. چرا چنین است؟ آیا این کافی نیست که یک طوقهٔ دلخواه α را در نقطهٔ q از کرهٔ S^n درنظر بگیریم و باانتخاب یک نقطهٔ $p \in S^n$ خارج از نگارهٔ α این واقعیت را به‌کارگیریم که $\{q\}$ یک درون‌برِ دگردیسی قوی[3] برای $S^n \backslash p$ است؟



1. simply connected 2. contractible 3. strong deformation retract

چرا، چرا؛ اما احتمالاً باید تاکنون مطالبی دربارهٔ «خمهای فضا پرکن»[1] شنیده باشید (مقالهٔ ج. پئانو: «دربارهٔ خمی که تمامی سطح یک صفحه را پر می‌کند» [2])، و به همین اعتبار، می‌توان طوقه‌های کره پرکنی یافت که برای آنها چنان نقطهٔ pیی اصلاً وجود نداشته باشد.

ولی، ارائهٔ یک برهان مستقیم، حقیقتاً مشکل نیست: کافی است بازهٔ $[o,۱]$ را در نقاط $o = t_o < \cdots < t_n = ۱$ به فواصل بسیار ریز چنان تقسیم کنیم که α در هیچ‌یک از بازه‌های فرعی این تقسیم جزئی «کره پرکن»[3] نباشد. به‌موجب پیوستگی، این کار همیشه ممکن است. سپس، انقباض‌پذیری $S^n\backslash pt$ ایجاب می‌کند که یک مانسته‌جایی برای α وجود داشته باشد که a را در t_i، منتهای بازه‌های فرعی، تثبیت کند، و به‌علاوه، α را به طوقه‌ای که هریک از بازه‌های فرعی را به‌یک دایرهٔ عظیمه می‌نگارد، ببرد. حال، این خم دیگر کره پرکن نیست، و استدلالی که قبلاً درنظر داشتیم معتبر خواهد بود.

اگر Y یک فضای پوششی همبند ـ راه و همبند ـ راه موضعی برای فضای X باشد و X ساده ـ همبند باشد، آنگاه $X \to Y$ باید چندگانگی (تکرّر)[4] از مرتبهٔ یک داشته باشد، و درنتیجه باید یک همسانریختی باشد. این ملاحظه، غالباً بسیار مفید و بیانگر این‌است که یک فضای ساده ـ همبند نمی‌تواند پوششهای جالبی داشته باشد، که نتیجهٔ بلافصل قضیهٔ یکتایی است. امّا حالا می‌خواهیم پوششهایی را درنظر بگیریم که در آنها فضای پوششی Y، و نه فضای پایهٔ X، ساده ـ همبند باشد.

تعریف (پوشش عام). یک فضای پوششی همبند ـ راه و همبند ـ راه موضعی $X \to Y$ را یک پوشش عام[5] خوانیم هرگاه Y ساده ـ همبند باشد.

نتیجهٔ رده‌بندی فضاهای پوششی. اگر X همبند ـ راه، همبند ـ راه موضعی و ساده ـ همبند نیمه موضعی باشد، و $x_o \in X$، آنگاه دقیقاً یک پوشش عام $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_o) \to (X, x_o)$ با تقریب یکریختی وجود دارد، و این یکریختی به طریق یکتا معین می‌شود.

به این اعتبار، می‌توان از پوشش عام[6] $\widetilde{X}$ برای X صحبت کرد.

ببینیم چه چیزی درمورد پوشش عام، «عام» است؟ تأمّلی مقدّماتی دراین زمینه ضروری است. گیریم X یک فضای همبند ـ راه، همبند ـ راه موضعی و ساده ـ همبندنیمه موضعی باشد، و فرض کنیم دو فضای پوششی به‌شکل زیر داده باشند

1. space-filling curves
2. Peano, G. “Sur une courbe qui remplit toute une aire plane”, *Math. Annalen* **36** (1890), 157-160.
3. sphere-filling 4. multiplicity 5. a universal cover 6. the universal cover

$$\begin{array}{ccc} (Z, z_0) & & \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & (Y, y_0) \\ (X, x_0) & \xleftarrow{\pi} & \end{array}$$

که زیرگروههای مشخصهٔ یکی (H برای p و G برای π) در دیگری قرار داشته باشد: $H \subset G \subset \pi_1(X, x_o)$. دراین‌صورت، بنابر ملاک قابلیّت بالابری، p را می‌توان «به π بالا برد»، یعنی دقیقاً نگاشت پیوستهٔ $f : (Z, z_o) \to (Y, y_o)$ هست که نمودار زیر را تعویضپذیر می‌سازد:

$$\begin{array}{ccc} (Z, z_0) & \xrightarrow{f} & \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & (Y, y_0) \\ (X, x_0) & \xleftarrow{\pi} & \end{array}$$

این f همواره یک نگاشت پوششی خواهد بود. برای آنکه ببینیم چرا چنین است، نمودار زیر را درنظر می‌گیریم:

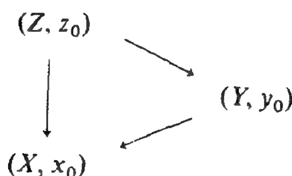
$$\begin{array}{ccc} (Z, z_0) & \underset{g}{\overset{h}{\rightleftarrows}} & (Y', y'_0) \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi'} & \\ {\scriptstyle p}\downarrow & (Y, y_0) & \\ & \swarrow{\scriptstyle \pi} & \\ (X, x_0) & & \end{array}$$

که درآن π' نگاشت پوششیی است که زیرگروه مشخصه‌اش H'، نگارهٔ وارون H در $\pi_1(Y, y_o)$ است:

$$\begin{array}{ccccc} H' & \subset & \pi_1(Y, y_0) & & \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\ H & \subset & G & \subset & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

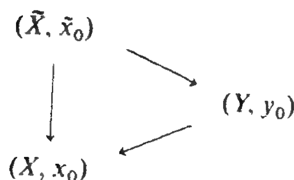
و به‌علاوه، h در نمودار فوق، بالابری f به π'، و g بالابری $\pi \circ \pi'$ به p است. نشان خواهیم داد که h یک یکریختی از فضاهای بالای (Y, y_o) است (و درنتیجه، f یک نگاشت پوششی است، زیرا که π' پوششی است). داریم $h \circ f = \pi'$، و اکنون اثبات می‌کنیم که g وارون h است. درهرحال داریم $g \circ h = \mathrm{Id}_{(Z,z_o)}$، زیرا این نگاشت، بالابریِ p به خود p است: $p \circ g \circ h = \pi \circ \pi' \circ h = \pi \circ f = p$. برای آنکه تساوی $h \circ g = \mathrm{Id}_{(Y',y'_o)}$ را نیز ثابت کنیم، نشان می‌دهیم که $h \circ g$ یک بالابری π' به‌خود π' است. برای این کار، ثابت می‌کنیم که $\pi' \circ h \circ g$ برابر π' است، یعنی $\pi' \circ h \circ g = f \circ g = \pi'$. اما این‌هم ازاین واقعیت نتیجه می‌شود که هر دو نگاشت، بالابریهایی برای $\pi \circ \pi'$ به π هستند: نگاشت π' درهرحال چنین است، و نگاشت $f \circ g$ نیز چنین است زیرا $\pi \circ f \circ g = p \circ g = \pi \circ \pi'$. همان چیزی که می‌خواستیم اثبات کنیم. □

خلاصه‌کنیم: اگر در دو فضای پوششی برای (X, x_o)، زیرگروه مشخصهٔ یکی در دیگری قرار داشته باشد، فضای پوششیی که زیرگروه مشخصهٔ کوچکتری دارد، به‌طور متعارف فضای دیگر را می‌پوشاند، و این‌هم به‌گونه‌ای است که سه نگاشت پوششی حاصل، یک نمودار تعویض‌پذیر پدید می‌آورند.



این همان تأمّل مقدماتی ما بود. اما، چون زیرگروه مشخصهٔ پوشش عامِ $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_o)$ بیمایه، یعنی برابر $\{1\}$ است، گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود:

گزاره. پوشش عام $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_o)$، هر فضای پوششی همبند ـ راه دیگرِ (Y, y_o) برای (X, x_o) را به‌طور متعارف می‌پوشاند، و این پوشاندن به‌گونه‌ای است که



تعویض‌پذیر است.

همین مطلب به خودی خود دلیل کافی است تا بدانیم که چرا پوشش عام را باید عام نامید، اما واقعیت دیگری نیز هست که این نکته را بیشتر تقویت می‌کند: پوشش عام، بالأخص نرمال نیز هست (واضح است)، و اگر $\mathscr{D}_X$ معرّف گروه تبدیلات پوششی $\widetilde{X} \to X$ باشد، همسانریختی متعارف $\widetilde{X}/\mathscr{D}_X \cong X$ را، از روی خود تصویر به‌دست می‌آوریم. باانتخاب نقاط پایهٔ $\widetilde{x}_o \to x_o$، یک یکریختی متعارف $\mathscr{D}_X \cong \pi_1(X, x_o)$ نیز، با همان جزئیاتی که در قضیهٔ راجع به‌گروه تبدیلات پوششی شرح دادیم، خواهیم داشت. حال، این دوگروه تبدیلات پوششی، متناظر با موقعیت مذکور درگزارهٔ فوق را، درنظر می‌گیریم:

$$
\begin{array}{ccc}
\widetilde{X} & & \\
{\scriptstyle \mathscr{D}_X}\downarrow & \searrow^{\mathscr{D}_Y} & \\
& & Y \\
X & \swarrow &
\end{array}
$$

دراین‌صورت، داریم $\mathscr{D}_Y \subset \mathscr{D}_X$، و در مقایسه با $\mathscr{D}_X \cong \pi_1(X, x_o)$ مجموعهٔ $\mathscr{D}_Y$ چیزی جز زیرگروه مشخصهٔ $G(Y, y_o) \subset \pi_1(X, x_o)$ نخواهد بود. حال باتوجه به‌اینکه $\widetilde{X} \to X$ نیز یک همسانریختی $\widetilde{X}/\mathscr{D}_Y \cong Y$ را القا می‌کند، با درنظرگرفتن کلیهٔ جوانب، قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ عمومیّت برای پوشش عام. فرض کنیم X یک فضای همبند ـ راه، همبند ـ راه موضعی و ساده ـ همبند نیمه موضعی باشد، و $x_o \in X$؛ و فرض کنیم که $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_o) \to (X, x_o)$ پوشش عام باشد، و $\mathscr{D}_X \cong \pi_1(X, x_o)$ گروه تبدیلات پوششی برای $\widetilde{X} \to X$. چنانچه $\Gamma \subset \mathscr{D}_X$ یک زیرگروه دلخواه باشد، نگاشت

$$
\begin{array}{c}
(\widetilde{X}/\Gamma, [\widetilde{x}_0]) \\
\Big\downarrow \\
(X, x_0)
\end{array}
$$

نگاشت پوششی یک فضای پوششی همبند ـ راه خواهد بود، و همهٔ فضاهای پوششی همبند ـ راه برای

(X, x_o)، باتقریب یک یکریختی که به‌طور یکتا معین می‌شود، به همین طریق به‌دست می‌آیند.

*

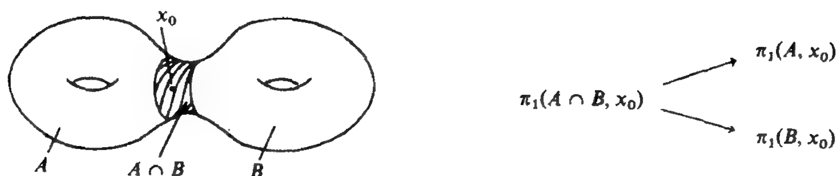
مایلم این قسمت را به چند تذکّر بسیارکوتاه دربارهٔ چگونگی محاسبهٔ گروههای بنیادی، که نهایت اهمیت را دارند، ختم کنم. یکی از وسایل محاسبه، خود نظریهٔ فضاهای پوششی است: گاهی اوقات به‌سادگی می‌توان گروه تبدیلات پوششی برای پوشش عام X را معیّن کرد. مثلاً داریم $\pi_1(S^1, x_o) \cong \mathbb{Z}$، زیرا بدیهی است که انتقال به‌وسیلهٔ اعداد صحیح $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ گروه تبدیلات پوششی پوشش عام $\mathbb{R} \to S^1$، $x \mapsto e^{2\pi i x}$ را تشکیل می‌دهد؛ اما برای $n \geqslant 2$، داریم $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_o) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$، زیرا پوشش عام $S^n \to \mathbb{RP}^n$ چندگانگی دو دارد.

نکتهٔ بدیهی ولی مفید زیر نیز مهّم است: گروه بنیادی یک حاصلضرب، به طریق متعارف، برابر است با حاصلضرب گروههای بنیادی:

$$\pi_1(X \times F, (x_o, f_o)) \cong \pi_1(X, x_o) \times \pi_1(F, f_o)$$

فضاهای پوششی و حاصلضربها، حالتهای خاصِ تاربندیهای موضعاً بیمایه[1] هستند، و اینها نیز، حالتهای خاصِ تاربندیهای سر[2] هستند، که برای آنها «دنبالهٔ کامل مانسته‌جایی»[3] شامل اطلاعاتی دربارهٔ گروه بنیادی فضای پایه، تار، و کلّ فضاست (دراین زمینه رجوع شود مثلاً به ص ۶۵، مرجع [۱۱]). ضمناً فراموش نکنیم که تابعگون π_1 به‌طور مسلّم ناوردای مانسته‌جایی[4] است.

بالأخره باید به قضیهٔ مهم زیفرت ـ وان کامپن[5] اشاره کنم، که به‌ما امکان می‌دهد تحت شرایطی گروه بنیادیِ فضایی به‌شکل $X = A \cup B$ را، از روی سه گروه و دو همریختی زیر:



به‌دست آوریم (مثلاً رجوع کنید به شمارهٔ ۸.۵، فصل سوم، مرجع [۱۶]).

۸. نقش فضاهای پوششی در ریاضیات

مفهوم فضاهای پوششی از نظریهٔ توابع، به‌ویژه از بررسی توابع «چند مقداری»[6] تمامریخت[7]، که در

1. locally trivial fibrations 2. Serre fibrations 3. exact homotopy sequence
4. homotopy invariant 5. Seifert-van Kampen 6. multi-valued
7. holomorphic

ادامهٔ تحلیلی ظاهر می‌شوند، نشأت می‌گیرد. این مفهوم را ریمان هنگامی کشف کرد که هنوز وسیلهٔ کافی، طبق معیارهای امروزی، برای درک درست آن وجود نداشت.

فرض کنیم $G \subset \mathbb{C}$ یک حوزه باشد و f جوانهٔ[1] یک تابع تمامریخت، که بتواند در طول راهی واقع در G ادامه یابد (مثلاً تابع $\sqrt{z}$ در $\mathbb{C}\backslash o$ یا تابع $\log$ در $\mathbb{C}\backslash o$، یا تابع $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ در $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ و هکذا). ادامهٔ تحلیلی دراین حال، معرّف یک «تابع چند مقداری» در G است، و این خود اساساً یک تابع (تک مقداری)[2] تمامریخت در یک فضای پوششی روی G است

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ G & & \end{array}$$

(باتوجه به مطالب گذشته، می‌توان درواقع گفت) که «به طریق متعارف» از جوانه‌های ادامه یافته به‌دست می‌آید.

تصادفاً، پوششهایی که بدین‌طریق به‌دست می‌آیند، حقیقتاً پوششهایی به‌معنای مورد نظر ما هستند (← تعریف ص ۱۶۷). پیدا شدن نقاط شاخه‌یی فقط هنگامی شروع می‌شود که $\widetilde{G}$، باافزودن نقاطی از $\mathbb{C}\backslash G$ که f در آنها نمی‌تواند به‌طور تحلیلی ادامه یابد، تکمیل شود (مثلاً، مانند نقطهٔ o درمورد $\sqrt{z}$)، و فضاهای پوششی «حفره»[3] دار (مانند مثال ص ۱۶۸)، هنگامی مطرح می‌شوند که f بتواند به همهٔ نقاط G، ولی نه در طول هر راه، ادامه پیدا کند.

بدین‌ترتیب، توابع چند مقداری که در نظریهٔ توابع به آنها برمی‌خوریم (و من نیازی نمی‌بینم که در شرح فایده‌ای که توابعی نظیر $\sqrt{z}$ برای ریاضیدانان دارند، صرف وقت کنم) اکنون می‌توانند در قالب فضاهای پوششی به‌خوبی درک شوند، و از همه مهمتر: در دسترس روشهای معمولی نظریهٔ توابع قرار داده شده‌اند. بررسی این‌گونه توابع، نه‌تنها انگیزهٔ اصلی برای ابداع فضاهای پوششی بوده، بلکه حتی تا به امروز یکی از مهمترین کاربردهای آن نیز بوده است، که برخلاف انتظار، هیچ‌یک از روشهای جدیدتر هم نتوانسته است دراین زمینه جانشین آن شود.

اما مطلب به همین‌جا ختم نمی‌شود. بگذارید نخست به‌این تذکر کلّی بپردازیم که فضاهای پوششی غالباً «در طبیعت یافت می‌شوند»، یعنی ناخواسته، درحالی‌که مشغول بررسی مسائل کاملاً متفاوتی

---

۱. جوانه $=$ germ، دو تابع f_1 و f_2 را در نقطهٔ مفروض x از یک فضای توپولوژیک X، موضعاً هم‌ارز خوانیم هرگاه یک همسایگی نقطهٔ x چون U موجود باشد به‌قسمی که $f_1|U = f_2|U$. دراین‌صورت می‌نویسیم $f_1 \sim_x f_2$. ردهٔ هم‌ارزی تابع f برای $\sim_x$ را «جوانهٔ تابع f در نقطهٔ x» گوییم.ـم.

2. single-valued 3. hole

هستیم با آنها مواجه می‌شویم، و در این مواقع، می‌توانیم اطلاعات به ظاهر از غیب رسیده را که فضاهای پوششی فراهم کرده‌اند، با خرسندی مورد استفاده قرار دهیم. مثلاً، فرض کنید که یک گروه متناهی G آزادنه روی یک فضای توپولوژیک Y عمل کند؛ در این صورت، نگاشت خارج قسمت $Y \to Y/G$ یک نگاشت پوششی است. و یا، مثال دیگر، فرض کنید که با خانواده‌ای از توابع دیفرانسیلپذیر، با تکینگیهای فاقد انشعاب[1]، سروکار داریم؛ در این صورت، این تکینگیها پوششی برای فضای پایه تشکیل می‌دهند. و هکذا موارد دیگر و دیگر.

اما فضاهای پوششی را اغلب حساب شده و عمداً به‌عنوان ابزارهایی وارد می‌کنند. فضاهای پوششی گرایش به‌این دارند که از خودِ فضایی که آنها می‌پوشانند «ساده‌تر» باشند (مثالِ $S^n \to \mathbb{RP}^n$ را می‌توان نمادی از این دست پنداشت)، بنابراین، اصل استفاده از فضاهای پوششی، کلاً چنین است: ابتدا X موضوع مورد علاقهٔ ما برای مطالعه است، اما X بیش از حد پیچیده و مستقیماً دستیابی به‌آن دشوار است، لذا سراغ یک فضای پوششی Y روی X می‌رویم که روشنتر به‌نظر آید، و از نظریهٔ فضاهای پوششی استفاده می‌کنیم تا بتوانیم از روی اطلاّعاتی که از Y داریم، اطلاّعاتی از X به‌دست آوریم. مثلاً، هر خمینهٔ جهتناپذیر[2] M یک خمینهٔ پوششی جهتپذیر دو ـ برگی[3] $\widetilde{M} \to M$ دارد (که «پوشش دوگانهٔ جهتپذیر»[4] آن نامیده می‌شود)، و این وسیله‌ای برای بررسی برخی احکام در حالت جهتناپذیری است، که اثبات آنها، در وهلهٔ نخست فقط «به‌منظور» استفاده در خمینه‌های جهتپذیر صورت می‌گیرد.

در تعدادی از کاربردها، این روند تسهیل، تنها هنگامی همهٔ توان خود را نشان می‌دهد که می‌خواهیم به پوشش عام برسیم. ذیلاً، به سه مثال مهّم از این فرایند اشاره می‌کنم.

(۱) رویه‌های ریمان. رویه‌های ریمان، خمینه‌های مختلط همبند یک بعدی هستند، که در نظریهٔ توابع معروف‌اند. به‌عنوان فضاهای توپولوژیک، خمینه‌هایی دو بعدی، و لذا رویه هستند. فرض کنیم X یک رویهٔ ریمان و $\pi : \widetilde{X} \to X$ پوشش عام آن باشد. بنابراین، در وهلهٔ نخست $\widetilde{X}$ فقط یک فضای توپولوژیک است و هنوز رویهٔ ریمان نیست، اما ساختار مختلط X مستقیماً به فضاهای پوششی نیز منتقل می‌شود؛ به‌آسانی می‌توان نشان داد که روی $\widetilde{X}$ دقیقاً یک ساختار مختلط هست که برای آن π تمامریخت است. بنابراین، $\widetilde{X}$ ناچار یک رویهٔ ریمان ساده ـ همبند است، و البته درک رویه‌های ریمان ساده ـ همبند خیلی آسانتر از حالت رویه‌های ریمان است، زیرا: بنابر قضیهٔ نگاشت ریمان برای رویه‌های ریمانی، $\widetilde{X}$ از نظر دوسو تمامریختی[5]، یا با صفحهٔ $\mathbb{C}$، یا باکرهٔ ریمان $\mathbb{CP}^1$ و یا با قرص یکهٔ $U \subset \mathbb{C}$ هم‌ارز است! خوب، حالا ببینیم چگونه از این شناخت برای به‌دست آوردن اطلاعاتی راجع به X استفاده می‌کنیم؟ ببینید، تبدیلات پوششی $\widetilde{X} \to \widetilde{X}$ نگاشتهای دوسو تمامریخت‌اند (این

1. bifurcation 2. non-orientable 3. tow-fold
4. orientable double cover 5. biholomorphically

حکمی است بیمایه و نتیجه‌ای از هیچ قضیهٔ خاصی نیست)؛ گروه تبدیلات پوششی، $\mathscr{D}$، آزادانه و «کاملاً ناپیوسته»[1] عمل می‌کند، یعنی $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ دارای یک همسایگی U است به قسمی که مجموعه‌های $\varphi(U)$، به‌ازای $\varphi \in \mathscr{D}$، دوبه‌دو جدا ازهم‌اند؛ لذا، فضای مداری چنین عملی، $\widetilde{X}/\mathscr{D}$، یک ساختار مختلط دارد که از $\widetilde{X}$ به‌ارث می‌برد. این ساختار یگانه ساختاری است که نگاشت $\widetilde{X} \to \widetilde{X}/\mathscr{D}$ را تامریخت می‌سازد. بنابراین، همسانریختی $\widetilde{X}/\mathscr{D} \cong \widetilde{X}$ که توسط نظریهٔ فضاهای پوششی داده می‌شود، آشکارا دوسو تامریخت است. حال، بدون استفاده از چیزی پیچیده‌تر از نظریهٔ فضاهای پوششی (که یک نظریهٔ توپولوژیک است!) و قضیهٔ نگاشت ریمان، می‌توانیم نتیجهٔ زیر را به‌دست آوریم: با تقریب هم‌ارزی دوسو تامریخت، رویه‌های ریمان دقیقاً عبارت‌اند از خارج قسمتهای $\widetilde{X}/\mathscr{D}$، که $\widetilde{X} = \mathbb{CP}^1$ یا $\widetilde{X} = \mathbb{C}$ و یا $\widetilde{X} = U$، و $\mathscr{D}$ زیرگروهی ازگروه خودریختیهای دوسو تامریخت $\widetilde{X}$ است که آزادنه و کاملاً ناپیوسته عمل می‌کند.

گروه خودریختیهای $\mathbb{CP}^1$، $\mathbb{C}$ و U از مدّتها پیش مورد مطالعه قرارگرفته، و صریحاً مشخص شده‌اند. زیرگروههایی را که آزادانه و کاملاً ناپیوسته عمل می‌کنند، می‌توانیم علی‌الاصول جستجو و $\widetilde{X}/\mathscr{D}$ را بررسی کنیم، و هرچند که این مسأله در حالت $\widetilde{X} = U$ به هیچ‌وجه مسألهٔ ساده‌ای نیست، اما دست‌کم به مرحله‌ای رسیده‌ایم که نقطهٔ شروع واقعی برای بررسیهای بعدی است، و برای حلّ مسألهٔ اولیه‌ای که داده‌های آن کلاً در عبارت «فرض کنیم X یک رویهٔ ریمان باشد»، خلاصه می‌شد، گام بزرگی به جلو برداشته‌ایم.

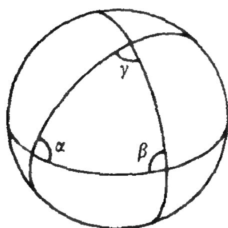
(۲) **صورتهای فضا.** یکی از مسایل کلاسیک هندسهٔ دیفرانسیل، که تا به امروز هم کاملاً حل نشده است، رده‌بندی صورتهای فضاست. منظور از یک صورت فضا[2]، یا یک صورت کلیفرد ـ کلاین[3]، یک خمینهٔ ریمانی همبند n بعدی کامل $(M, <\cdot\cdot, \cdot\cdot>)$ با انحنای مقطعی ثابت[4] K است. (← ص ۶۹، مرجع [۲۱]). بدون کاستن از کلیت، می‌توان فقط حالتهای $K = +1, o, -1$ را در نظر گرفت. یک فضای پوششی همبند برای یک صورت فضا، به طریق متعارف، خود نیز یک صورت فضا با همان انحناست. مشابه قضیهٔ نگاشت ریمان، در اینجا قضیهٔ کیلینگ ـ هوپف[5] را داریم که می‌گوید: تنها صورتهای فضای همبند، با تقریب طولپایی، به‌ترتیب عبارت‌اند از:

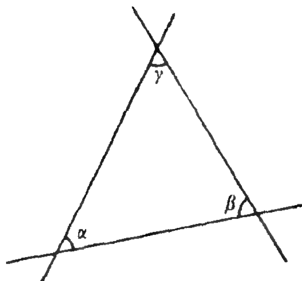
کرهٔ S^n با انحنای $K = +1$؛

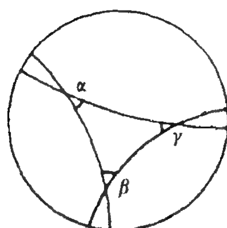
فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با انحنای $K = o$؛

فضای هذلولولی $\mathbb{H}^n$ با انحنای $K = -1$

1. properly discontinuously 2. space forms 3. Clifford-Klein form
4. with constant-sectional curvature 5. Killing-Hopf theorem







$\alpha + \beta + \gamma > \pi$ $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

مثلثهای ژئودزیک درکرهٔ S^2، در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ و در صفحهٔ هذلولی (D^2 با «متریک هذلولی»)

گروههای طولپایی[1] این سه فضا کاملاً شناخته شده‌اند، و مشابه آنچه که درمورد رویه‌های ریمان گفته شد، نظریهٔ فضاهای پوششی نشان می‌دهد که: خارج قسمتهای S^n، $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{H}^n$ بر زیرگروههای گروه طولپایی که آزادانه وکاملاً ناپیوسته عمل می‌کنند تنها صورتهای فضا، با تقریب طولپایی، هستند که وجود دارند.

(۳) گروههای لی. یک گروه لی[2] عبارت است از یک خمینهٔ دیفرانسیلپذیر همراه با یک ساختار گروهیِ «دیفرانسیلپذیر» (یعنی نگاشت $G \times G \to G$، $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ دیفرانسیلپذیر است). گروههای لی، در زمینه‌های مختلف ریاضیات، نقش عمده‌ای دارند، و از این حیث، در فیزیک نظری نیز نقش عمده‌ای بازی می‌کنند. گروههای لی $O(n)$، $GL(n, \mathbb{R})$، $GL(n, \mathbb{C})$، $SO(n)$، $U(n)$، $SU(n)$، مثالهای عموماً شناخته شده‌ای هستند. نظریهٔ فضاهای پوششی نشان می‌دهد که پوشش عام $\widetilde{G}$ برای یک گروه همبند لی، خود نیز، به طریق متعارف، یک گروه لی است، و G به شکل خارج قسمت $\widetilde{G}/H$ است، که در آن H، یک زیرگروه گسستهٔ $\widetilde{G}$ است. اما، گروههای ساده ـ همبند لی، قابل رده‌بندی هستند، زیرا علی‌الاصول به‌وسیلهٔ «جبر لیِ»[3] خود، معین می‌شوند.

*

نمی‌خواهم شما را با این احساس رها کنم که فکر کنید ترفند فضای پوششی، نکتهٔ اساسی در این مسائل رده‌بندی است: قضیهٔ نگاشت ریمان خود به تنهایی عمیقتر از کل نظریهٔ فضاهای پوششی از اوّل تا آخر است. اما می‌توان گفت که مفهوم فضای پوششی، مانند بسیاری از مفاهیم پایه‌یی دیگر در توپولوژی، جزء مفاهیم اجتناب‌ناپذیر در تعدادی از زمینه‌های مهم علمی است، و بر هر ریاضیدانی واجب است که از آن آگاه باشد.

1. isometry groups 2. Lie group 3. Lie algebra

۱۰

قضیهٔ تیخونوف



۱. یک قضیهٔ نامحتمل؟

قبلاً در فصل ۱، هنگام بحث از مفاهیم بنیادی، مطمئن شدیم که حاصلضرب دو فضای توپولوژیک فشردهٔ $X \times Y$ فضایی است فشرده، و به استقراء البته نتیجه می‌شود که حاصلضرب تعدادی متناهی از فضاهای فشرده، همواره فشرده است. در فصل ۶، بخش ۲، حاصلضرب تعداد دلخواه زیادی سازه را نیز

درنظرگرفتیم، واکنون دوباره به‌این مطلب بازمی‌گردیم، زیراکه این فصل را به قضیهٔ زیراختصاص داده‌ایم:

قضیهٔ (تیخونوف[1] ۱۹۳۰). اگر $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک خانواده از فضاهای فشرده باشد، حاصلضرب $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ نیز فشرده است.

*

هرکس که برای نخستین بار قضیهٔ تیخونوف را بشنود، ناچار اعتراف می‌کند که احساس ما از مفهوم فشردگی، بایستی برای حاصلضربهای نامتناهی، عکس آن‌را به ذهن القاکند. زیرا فشردگی، خود یک ویژگی متناهی بودن است (پوششهای باز متناهی را به یاد آورید)، و لذا جای تعجب نخواهد بود که این ویژگی به فضاهای حاصل از اجتماعهای متناهی یا حاصلضربهای متناهی فضاهای فشرده، منتقل شود. اما انتظار نداریم که، ساختی با تعداد بینهایت مصالح فشرده، باز هم ساختی فشرده باشد. ساده‌ترین مثالها نشان می‌دهند که بزرگ شدن پیاپی فضاهای فشرده، ممکن است سرانجام به فضاهای نافشرده بینجامد: مثلاً، مجتمعهای ضَثمُبِ بینهایت حجره‌یی، همواره نافشرده‌اند؛ خمینه‌های نافشرده را می‌توان با زیرمجموعه‌های فشرده «تحلیل برد»[2].

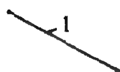


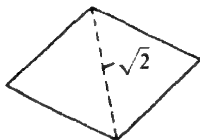
$\bigcup_{i\geq 1} K_i = M$

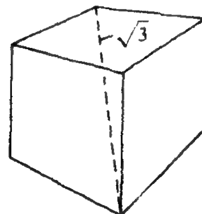
$K_{i-1}\subset K_i\subset K_{i+1}\subset\cdots$

و یا، باید به فرایندی کاملاً پیش پا افتاده، که نوعاً نادر نیست، اشاره کنیم: الحاق یک نقطهٔ تنها[3] به یک فضای فشرده، باز هم یک فضای فشرده می‌دهد؛ اما با ادامهٔ این‌کار بینهایت بار، یعنی باگرفتن اجتماع جدا از هم فضای فشردهٔ مفروض و یک فضای گسستهٔ نامتناهی، به یک فضای نافشرده می‌رسیم.

از همین دیدگاه، چنانچه دنبالهٔ «مکعبها»ی:







$[0,1]^0\subset\quad [0,1]^1\subset\quad [0,1]^2\subset\quad [0,1]^3\subset\cdots$

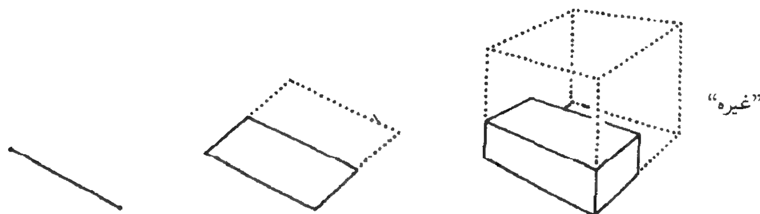
---

1. Tychonoff 2. exhaust 3. isolated point

را در نظر بگیریم، به سختی می‌توانیم احساس کنیم که $[o, 1]^{\infty}$ باید فشرده باشد. همچنین، وقتی به شمولهای $\{o, 1\}^{\circ} \subset \{o, 1\}^{1} \subset \cdots$ فکر کنیم، فشردگی $\{o, 1\}^{\infty}$ موجه به نظر نمی‌رسد: مگر نه این‌است که $\{o, 1\}^{\infty}$ واقعاً یک فضای گسستهٔ نامتناهی و یا چیزی بسیار مشابه‌آن‌است؟

«در مقابله» با قضیهٔ تیخونوف، می‌توان این واقعیت را شاهد آورد که گوی یکهٔ یک فضای برداری نرمدار، فقط در حالت بعد متناهی، فشرده است: که شاهدی دیگر در دفاع از این دیدگاه است که نامتناهی بودن بعد، مانع فشردگی است.

و اما، باز اگر می‌بینید که احساس ما در این زمینه دچار اشتباه می‌شود، به علت درک شهودی ما از فشردگی نیست، بلکه بیشتر از احساس ما نسبت به حاصلضربهاست. ما طبیعتاً درک شهودی خود از حاصلضرب را، نخست از حاصلضربهای دو یا سه سازه‌یی در فضای $\mathbb{R}^{3}$ اخذ کرده‌ایم، و لذا برای ما آن‌قدرها مشهود نیست که مفهوم «نزدیکی» در توپولوژیِ حاصلضربیِ حاصلضربهای نامتناهی، خصوصیتی است که فقط در مورد مختصاتی از نوع متناهی برقرار است: زیرا، در یک همسایگی U از یک نقطهٔ $x_o \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$، هر قدر هم این همسایگی کوچک باشد، حکمی به شکل $u \in U$، مطلقاً چیزی دربارهٔ اکثر (یعنی همه جز تعدادی متناهی) مؤلفه‌های u، u_λها، نمی‌گوید، زیرا U باید شامل جعبه‌ای به شکل $\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_r}^{-1}(U_{\lambda_r})$ باشد. به همین دلیل، تصوری که ما از مکعب ∞ بعدی داریم، وآن‌را از حالت متناهی بعد به‌دست‌می‌آوریم، تصورکاملاً مناسبی نیست. در دید ما،که همواره تمایل داریم «نزدیک» را به معنی «نزدیک از لحاظ فاصله»[1] تعبیر کنیم، شاید، به اصطلاح، مکعب هیلبرت این واقعیت راکه: مؤلفه‌هایی از $(x_1, x_2, \cdots)$ که «بسیار دورند»، نسبتاً بی‌اهمیت‌اند، بهتر بتواند نشان دهد. مکعب هیلبرت[2]، جعبه‌ای است در یک فضای تفکیک‌پذیر هیلبرت که درازای یالهایش در امتداد محور e_n برابر $1/n$ است (قطر جعبه، کلاً برابر است با $\sqrt{\sum 1/n^2} = \pi/\sqrt{6}$).
مکعب هیلبرت را می‌توان با در نظرگرفتن جعبه‌های مشابه در ابعاد پایینتر مجسم کرد:



و اما، مکعب هیلبرت درواقع با حاصلضرب شمارایی از بازه‌های $[o, 1]$ همسانریخت است. (به سهولت می‌توان تحقیق کرد که نگاشت

1. metrically close 2. Hilbert cube

$$(x_n)_{n\geqslant ۱} \mapsto (x_۱, x_۲/۲, x_۳/۳, \cdots)$$

یک همسانریختی از این حاصلضرب به مکعب هیلبرت است).

*

اکنون که به صحت قضیهٔ تیخونوف پی بردیم، ممکن است، براساس تجارب گذشته‌ای که از نتایج صحیح مشابه اندوخته‌ایم، فکرکنیم که برهان قضیه نباید ابداً دشوار باشد: «راهی را پیش بگیریم که همواره در اثبات قضایا به کار می‌رود: فرض کنیم $\mathfrak{B} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ پوشش بازی برای فضای $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ باشد. به‌ازای هر $x \in V_\alpha$، مجموعهٔ V_α الزاماً شامل یک جعبهٔ تمام $U_{\lambda_۱} \times \cdots \times U_{\lambda_r} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_i} X_\lambda$ است. حال، فرض کنیم زیرپوشش متناهی وجود نداشته باشد. لذا ... و الی آخر». ولی نه! هر چند بسیاری از برهانهای توپولوژی نقطه ـ مجموعه، خودبه‌خود، به راهنمایی احساس، تنظیم و با عبارات استادانه و شهود فضایی جلا داده می‌شوند ـ اما برهان قضیهٔ تیخونوف از این قبیل نیست.

۲. فایدهٔ آن چیست؟

قضیه‌ای که به مقابله با شهود می‌پردازد، وجود خود را با همین ویژگی تنها، توجیه می‌کند. قبول. اما یک دیدگاه کلی، و شاید وزینتر، این‌است که هر نظامی تلاش می‌کند که مفاهیم پایهٔ خود را منقح سازد. مفاهیم، دفعتاً پدید نمی‌آیند تا اعلام وجود کنند بلکه این وظیفهٔ ریاضیدان است که از میان چندین مفهوم مشابه، مناسبترین را برگزینند. در این راستا، مثلاً، قضیهٔ تیخونوف، دلیلی قطعی برای آن بوده است که تعریف مفهوم فشردگی به کمک پوششهای باز را، بر مفهوم فشردگی دنباله‌ای، که به حاصلضربهای نامتناهی منتقل نمی‌شود، ترجیح دهد.

حال ببینیم که در رابطه با کاربردهایی خارج از خودِ توپولوژیِ نقطه ـ مجموعه، موقعیت چگونه است؟ به جرأت می‌توانم بگویم که قضیهٔ تیخونوف در توپولوژی جبری و توپولوژی دیفرانسیل، کاربرد اساسی ندارد. ولی، درآنالیز تابعی در چندین جای مهم نقش عمده دارد، و در سطور آتی به سه نمونه از این موارد اشاره می‌کنم. هدف من فقط آن خواهد بود که چگونگی دخالت قضیهٔ تیخونوف را در اقامهٔ هر برهان نشان دهم. ذکر جزئیات این برهانها غیر عملی است، زیرا در اینجا فقط می‌توان زمینهٔ مربوط به‌این براهین را مطرح ساخت.

(۱) **فشردگی ضعیف گوی یکه در فضاهای بازتابی باناخ.** فرض کنیم X یک فضای نرمدار روی $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ باشد. برای یک نگاشت خطی پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{K}$ («صورت خطی»)، نرم را چنین تعریف می‌کنیم $\|f\| := \sup_{\|x\|\leqslant ۱}|f(x)|$، و با این نرم، فضای صورتهای

خطی[1]، یعنی، X'، به یک فضای نرمدار که فضای دوگان[2] X است تبدیل می‌شود. فضای دوگان همواره یک فضای باناخ است، حتی وقتی‌که خود فضای X کامل نباشد.

هر عضو $x \in X$ به‌گونه‌ای متعارف یک صورت خطی را بر فضای صورتهای خطی تعریف می‌کند، که ضابطهٔ آن $x : X' \to \mathbb{K}, f \mapsto f(x)$ است و بدین‌ترتیب، یک نگاشت خطی یک‌به‌یک طولپای از X به X'' به‌دست می‌آید، که به کمک آن همواره می‌توان X را زیرمجموعه‌ای از X''، $X \subset X''$، در نظر گرفت. فضای X را بازتابی[3] گوییم هرگاه علاوه بر آنچه گفته شد، تساوی $X = X''$ برقرار باشد. فضاهای هیلبرت مثالی از فضاهای بازتابی هستند.

منظور از توپولوژی ضعیف[4] بر یک فضای نرمدار X، درشتبافت‌ترین توپولوژی روی X است که برای آن نگاشتهای $f : X \to \mathbb{K}$ برای هر $f \in X'$ پیوسته باشند. یک زیر پایهٔ این توپولوژی چنین است:

$$\{f^{-1}(U) |\ f \in X', U \subset \mathbb{K}, \text{باز است} U\}$$

بنابراین، بر هر فضای نرمدار دو توپولوژی موجود است: یکی توپولوژی ناشی از نرم فضاست وقتی‌که واژهٔ توپولوژی به تنهایی آورده شود، و دیگری توپولوژی ضعیف است. بر فضای دوگان، X'، یک توپولوژی سوم نیز منظور می‌شود که همواره «ضعیفتر» (یعنی درشتبافت‌تر) است، و آن را توپولوژی ضعیف ـ ستاره[5] یا توپولوژی ضعیف ـ * می‌نامند، که درشتبافت‌ترین توپولوژیی است که برای آن همهٔ نگاشتهای $x : X' \to \mathbb{K}$ به‌ازای هر $x \in X$ پیوسته است. یک دنبالهٔ $(f_n)_{n \geqslant 1}$ در X' همگرای ضعیف ـ ستاره است اگر و تنها اگر همگرای نقطه به نقطه باشد، یعنی اگر، برای هر $x \in X$، دنبالهٔ عددی $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ همگرا باشد.

فرع قضیهٔ تیخونوف. برای توپولوژی ضعیف ـ ستاره، گوی یکه در X' مجموعه‌ای فشرده است.

خلاصهٔ برهان. فرض کنیم D بازهٔ $[-1, 1]$ (یا قرص $\{z \in \mathbb{C} | |z| \leqslant 1\}$) در $\mathbb{K}$ باشد، و $D_x := \{\|x\|.z | z \in D\}$. در این‌صورت، بنابر قضیهٔ تیخونوف می‌دانیم که $\prod_{x \in X} D_x$ در هر حال فشرده است، لذا هر زیر فضای بستهٔ این حاصلضرب نیز فشرده است. خواهیم دید که گوی یکهٔ $U' := \{f \in X' | \|f\| \leqslant 1\}$ با توپولوژی ضعیف ـ *، با یک چنین زیرفضای بسته‌ای همسانریخت است. در واقع، نگاشت $U' \to \prod_{x \in X} D_x$ را با ضابطهٔ $f \mapsto \{f(x)\}, x \in X$ تعریف می‌کنیم. روشن است که این نگاشت یک‌به‌یک است؛ نگاشتهای مختصاتی $f \mapsto f(x)$، بنا بر تعریف توپولوژیِ ضعیف ـ ستاره، پیوسته‌اند، لذا کل نگاشت در این توپولوژی پیوسته است. فرض

---

۱. توجه شود که طبق تعریف، مؤلف «صورت خطی» را به معنی صورت خطی پیوسته به‌کار می‌برد.ـم.

2. dual space 3. reflexive 4. weak topology 5. weak*-topology

کنیم $\widetilde{U}$ نگارهٔ این نگاشت باشد. به‌ازای نقطهٔ ثابت $x \in X$ و مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{K}$، مجموعهٔ $\{f \in U' | f(x) \in U\}$، که عضوی از زیر پایه است، به روی $\widetilde{U} \cap \pi_x^{-1}(U)$ برده خواهد شد، پس نگاشت $U' \to \widetilde{U}$ در حقیقت یک همسانریختی است. مرحلهٔ بعدی آن است که ثابت شود $\widetilde{U}$ در $\prod_{x \in X} D_x$ بسته است؛ اثبات آن، اندکی کار می‌برد، ولی به‌هیچ گونه ابزار پیشرفته‌تری نیاز ندارد. و به‌این ترتیب حکم مطلوب نتیجه می‌شود. . . . □

در مورد فضاهای بازتابی، البته توپولوژی ضعیف روی X' با توپولوژی ضعیف ـ ستاره یکی است، و لذا گوی یکه در X'، و همچنین در $X'' = X$ نیز، فشردهٔ ضعیف خواهد بود. اگر X تفکیکپذیر[1] هم باشد، کل فضا با توپولوژی ضعیف، شمارای یکم نخواهد بود، اما گوی یکه شمارای یکم (و حتی متریکپذیر) خواهد بود (رجوع شود به ص ۷۵، مرجع [۴])، پس نه تنها فشرده، بلکه در واقع فشردهٔ دنباله‌یی است: هر دنبالهٔ کراندار در نرم[2] یک زیردنبالهٔ همگرای ضعیف[3] دارد. . . .

(۲) فشردگی طیف در جبر تعویضپذیر باناخ. منظور از یک جبر تعویضپذیر باناخ، یک فضای باناخ B همراه با یک قانون ضرب است که از آن $\mathbb{C}$ ـ جبر تعویضپذیر با یکهٔ ۱ می‌سازد و در شرط

$$\|ab\| \leqslant \|a\|.\|b\|$$

صدق می‌کند. ساده‌ترین و شاید به اصطلاح «روشنترین» مثال، جبرهای توابع پیوستهٔ کراندار بر فضاهای توپولوژیک X، یعنی جبرهای $C(X)$اند. اما مثالهای جالبتر، در جبرهای تابعی[4] زیاد نیستند، بلکه در جبرهای عملگری[5] هستند. درواقع، مطالعهٔ عملکرها (مانند عملگرهای دیفرانسیلی و عملگرهای انتگرالی)، یکی از هدفهای عمدهٔ آنالیز تابعی است. و اما، چنانچه یک یا چند عملگر دو به‌دو تعویضپذیر در یک فضای باناخ داشته‌باشیم، این عملگرها یک زیر جبر تعویضپذیر B در جبر (تعویضناپذیر) باناخ کلیهٔ عملگرهای فضا تشکیل می‌دهند، و نکتهٔ شایان تحسین آنکه یک شناخت دقیقتر از B به‌عنوان یک جبر باناخ، یعنی با تقریب یکریختی جبرهای باناخ، ممکن است اطلاعات مفیدی از این عملگرها در برداشته باشد. البته، با این شیوهٔ بررسی، برخی از خصوصیات فردی عملگرها دیده نمی‌شوند: مثلاً معلوم نمی‌شود عملگرهای مورد نظر، عملگر مشتقگیری هستند یا نیستند و بر چه چیزی اثر می‌کنند. اینها ویژگیهایی هستند که نمی‌توانند از نوع یکریختی جبرهای باناخ استنباط شوند، درست همانطور که استفاده از یک تابعگون توپولوژی جبری، خصوصیات فردی یک مسألهٔ هندسی را از نظر می‌پوشاند. اما بسیاری از ویژگیهای این عملگرها در این جبر باناخ، قابل تشخیص باقی می‌مانند. بیش از همه،

1. separable 2. bounded sequence in the norm 3. weakly convergent
4. function algebras 5. operator algebras

ویژگیهای جبری از این قبیل که آیا این عملگر یک تصویر ($b = b^2$)، یا یک پوچتوان ($b^n = o$)، یا وارونپذیر است؟ یا «جذر» دارد ($b = a^2$)؟ اما از این مهمتر، وجود نرم عملگر در جبر باناخ است و لذا می‌توان فرایندهای حدی، از قبیل سریهای توانی عملگرها و غیره را بررسی کرد.

اما چگونه می‌توانیم این خواست خود راکه «بینش» ژرف از ساختار جبر باناخ است، تحقق بخشیم؟ آری، آگاهی به حد اعلی از این ساختار را می‌توان از راه پیدا کردن یک فضای توپولوژیک X و یک یکریختی جبرهای باناخ $B \cong C(X)$ به‌دست آورد! چگونه، و تحت چه شرایطی، می‌توان این کار را انجام داد؟ برای پاسخ دادن به‌این سؤال، باید ببینیم که چگونه، و چه وقت، می‌توان یک فضای مفروض X را از روی ساختار جبر باناخ آن $C(X)$، بازسازی کرد. پس، مسأله این‌است: چه می‌توان کرد که نقطهٔ $x \in X$ به‌صورت یک شیء جبری (باناخ) جلوه کند؟ نقاط X عملاً، به دو صورت عرض اندام می‌کنند. نخست، هر x، از طریق $f \mapsto f(x)$ معرف یک همریختی جبر $C(X) \to \mathbb{C}$ است، که اگر X فضای زیاد نامناسبی نباشد، نقطهٔ x می‌تواند با این همریختی مشخص شود. برای این‌کار، کافی است که اگر $x \neq y$ دو نقطهٔ مفروض از X باشند، بتوانیم تابع پیوستهٔ کرانداری بر X پیدا کنیم که مقادیر مختلف در این دو نقطه اختیار کند. بنابراین، در یک جبر تعویضپذیر باناخ دلخواه، می‌توان همریختیهای جبرهای $B \to \mathbb{C}$ را شق دیگری از نقاط $x \in X$ تلقی کرد.

از سوی دیگر، هر $x \in X$ در $C(X)$ معرف یک ایدآل، پوچساز[1] x، است که چنین تعریف می‌شود: $\mathfrak{a}_x := \{f \in C(X) | f(x) = o\}$. بدیهی است که این ایدآل یک ایدآل ماکسیمال است، زیرا اگر ایدآلی شامل $\mathfrak{a}_x$ و یک تابع دیگر f، مقید به شرط $f(x) \neq o$ باشد این ایدآل باید شامل هر تابع دیگر، یعنی خود $C(X)$ باشد:

$$\mathfrak{a}_x + \mathbb{C}.f = C(X),$$

که واضح است. اینجا نیز، برای فضاهای مناسب، به‌ازای $x \neq y$، داریم $\mathfrak{a}_x \neq \mathfrak{a}_y$. بنابراین، یک نقطهٔ شروع مناسب (ولو نامناسب) این‌است که برای یک جبر تعویضپذیر باناخ B، به اصطلاح طیف[2] B با تعریف:

$$\text{Spec}B := B \text{ مجموعهٔ ایدآلهای ماکسیمالِ}$$

را در نظر بگیریم و آن‌را برای مجموعهٔ زیر بنایی فضای توپولوژیک مطلوب نامزد کنیم.

درواقع، هر دو نحوهٔ شروع، دو بیان مختلف از یک چیز واحدند: به هر همریختی جبرهای $B \to C$، یک ایدآل ماکسیمال، یعنی هستهٔ آن، نظیر می‌شود. این تناظر بین همریختیهای جبرها و ایدآلهای ماکسیمال،

1. annihilator 2. spectrum

یک تناظر دوسویی است، زیرا، بنابر قضیه‌ای که اثبات آن دشوار نیست (قضیهٔ گلفاند ـ مازور[1])، به هر ایدآل ماکسیمال a، یک و دقیقاً یک همریختی جبرها $B/a \cong \mathbb{C}$ وابسته می‌شود. بنابراین، اعضای $\mathrm{Spec}B$ را می‌توان هم ایدآلهای ماکسیمال تلقی کرد و هم همریختیهای جبر $\varphi : B \to \mathbb{C}$. دربارهٔ هدف ما که نمایش B به شکل یک جبر تابعی است، حالت خاص $B = C(X)$ قاطعانه به ما می‌گوید که چگونه توابعی را باید به اعضای $b \in B$ نظیر کنیم، و آن $f_b : \mathrm{Spec}B \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \varphi(b)$ است.

همریختیهای جبر $\varphi : B \to C$ خودبه‌خود صورتهای خطی با نرم ۱ هستند، ولذا $\mathrm{Spec}B$ به شیوه‌های متعارف زیرمجموعه‌ای ازکرهٔ یکه در فضای دوگان B' است. به‌ویژه، توابع f_b همواره کراندارند (به $||b||$).

روی مجموعهٔ $\mathrm{Spec}B$ هنوز هیچگونه توپولوژی برنگزیده‌ایم، اما اگر فقط بخواهیم که همهٔ f_bها پیوسته باشند، سعی می‌کنیم با اقتصادیترین راه ممکن عمل کنیم، و این هم دقیقاً به‌این معنی است که توپولوژیی که باید به $\mathrm{Spec}B \subset B'$ بدهیم، توپولوژی القایی توسط توپولوژی ضعیف ـ ستاره است! در این‌صورت، واقعاً یک همریختی جبری متعارف

$$\rho : B \longrightarrow C(\mathrm{Spec}B), b \mapsto f_b$$

به دست می‌آوریم. آیا این همریختی، یکریختی نیست؟ در این مورد، باید گفت که نه، هر جبر تعویضپذیر باناخ، با یک $C(X)$ یکریخت نیست. اما در $C(X)$ یک ساختار جبری دیگری نیز موجود است، که باید آن‌را هم در B دخالت داد، و آن مزدوج‌گیری مختلط[2] است به شرح زیر: منظور از یک «برگشت»[3] $^* : B \longrightarrow B$ در یک جبر تعویضپذیر باناخ، یک همریختی $\mathbb{R}$ ـ جبر است با ویژگیهای زیر:

$(\lambda.1)^* = \overline{\lambda}.1$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$،

$b^{**} = b$ برای هر $b \in B$،

$||b^* b|| = ||b||^2$ برای هر $b \in B$،

یک جبر تعویضپذیر باناخ همراه با یک برگشت را یک B^* ـ جبر می‌نامند. برای این‌گونه جبرها، قضیهٔ زیر را داریم

قضیه (گلفاند ـ نویمارک[4]). اگر $(B, *)$ یک B^* ـ جبر باشد، $\rho : B \to C(\mathrm{Spec}B)$ یک یکریختی طولپای B^* ـ جبرهاست.

1. Gelfand-Mazur theorem
2. complex conjugation
3. involution
4. Gelfand-Neumark

لذا، این جواب سؤال مطرح شده در ابتدای بحث، و یا لااقل جوابی برای آن‌است. اینکه این پرسش ازکجا آمده و پاسخ فعلی به کجا خواهد انجامید، موضوعی است که در آنالیز تابعی به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد وگفتنی در این زمینه زیاد است. اما، گمان می‌کنم که با اشارات اندکی که در اینجا آوردم، منظورم را از اینکه می‌گویم: طیف یک جبر تعویض‌پذیر باناخ یکی از مفاهیم «مهم» آنالیز تابعی است، درک می‌کنید. و اما، قضیهٔ تیخونوف حکم جالبی در بارهٔ این طیف دارد. همان‌طورکه قبلاً دیدیم، $\mathrm{Spec}B$، زیرفضایی ازکرهٔ یکهٔ B' با توپولوژی ضعیف ـ ستاره است،که به موجب قضیهٔ تیخونوف یک فضای فشرده است. به آسانی می‌توان نشان داد که $\mathrm{Spec}B$ درواقع یک زیرفضای بستهٔ این کره است، ولذا نتیجهٔ زیر، که با توجه به قضیهٔ گلفاند ـ نویمارک، بخصوص جالب توجه است، به‌دست می‌آید:

نتیجهٔ قضیهٔ تیخونوف. طیف یک جبر تعویض‌پذیر باناخ، فشرده است.

*

(۳) توسیع فشردهٔ استون ـ چخ[1]. در فرایند رهگشای بخش قبل، تلاش ما آن بود که X را از روی $C(X)$ بازسازی کنیم، اما همان‌گونه که نتیجهٔ قضیهٔ تیخونوف نشان می‌دهد، $\mathrm{Spec}C(X)$ نمی‌تواند همواره مساوی X باشد، زیرا X الزاماً فشرده نیست. روابط حاکم بر فضاهای X و $\mathrm{Spec}C(X)$ کدام‌اند؟ بدون شرایطی اضافی، نگاشت متعارف $X \to \mathrm{Spec}C(X)$ الزاماً نه یک‌به‌یک است و نه پوشا. ولی اگر تصادفاً یک‌به‌یک نباشد، این نتیجهٔ علت نسبتاً غیر جالبی است، و آن تقریباً این‌است که توپولوژی X به قدری درشت‌بافت است که توابع پیوستهٔ کراندار نمی‌توانند همهٔ نقاط X را جدا کنند. (مثلاً، در توپولوژی بیمایه، هر تابع پیوسته، ثابت، و لذا $\mathrm{Spec}C(X)$ یک نقطه است). لذا، برای آنکه این اثر را ردکنیم، یک ویژگی جداسازی را می‌پذیریم، و اما آن ویژگی جداسازی که در اینجا بهترین تأثیر را می‌گذارد، همان است که «کاملاً منظم[2]» نامیده می‌شود: نقاط باید بسته باشند و به‌علاوه، به‌ازای هر مجموعهٔ بستهٔ A و هر نقطهٔ $p \notin A$، باید یک تابع پیوستهٔ $f : X \to [o, ۱]$ موجود باشد به قسمی که $f(p) = o$ و $f|A = ۱$. این ویژگی مثلاً در هر فضای هاوسدورفی که لم اوریسون را بتوان در آن به کار برد، پیش می‌آید. اما در این‌صورت، قضیهٔ زیر برقرار است: اگر X کاملاً منظم باشد، آنگاه نگاشت متعارف $X \to \mathrm{Spec}C(X)$، یک نشانیدن[3]، یعنی یک همسانریختی بر روی نگارهٔ این نگاشت است، و این نگاره، زیر فضایی چگال است، یعنی بستار آن، کل فضای $\mathrm{Spec}C(X)$ است (رجوع شود به ص ۸۷۰ مرجع [۸]).

به کمک نشانیدن فوق، می‌توان خود X را یک زیر مجموعهٔ چگال در فضای $\mathrm{Spec}C(X)$، که بنا بر قضیهٔ تیخونوف، فشرده است، در نظر گرفت: به ویژه، هر فضای کاملاً منظم، زیرفضایی از یک فضای فشرده است، که خود این هم کاملاً شگفت‌آور است. $\mathrm{Spec}C(X)$ را اصطلاحاً

1. Stone-Čech compactification 2. completely regular 3. embedding

«توسیع فشردهٔ استون ـ چخ» برای یک فضای کاملاً منظم X می‌نامند، و معمولاً آن‌را با نماد βX نمایش می‌دهند. به یک معنی، می‌توان آن‌را «بزرگترین» توسیع فشرده دانست: این توسیع فشردگی، با این ویژگی که هر نگاشت پیوسته از X بتوی یک فضای هاوسدورف فشرده، می‌تواند به βX توسیع یابد، مشخص می‌شود. ... ادای حق مطلب دربارهٔ توسیع فشردهٔ استون ـ چخ، کتابی دیگر (و نیز مؤلفی دیگر) لازم دارد، اما بدون آن نیز، امیدوارم با اشارات کوتاه فوق، حس احترام شما را نسبت به قضیهٔ تیخونوف، که هم اکنون می‌خواهیم به برهان آن توجه کنیم، برانگیخته باشم.

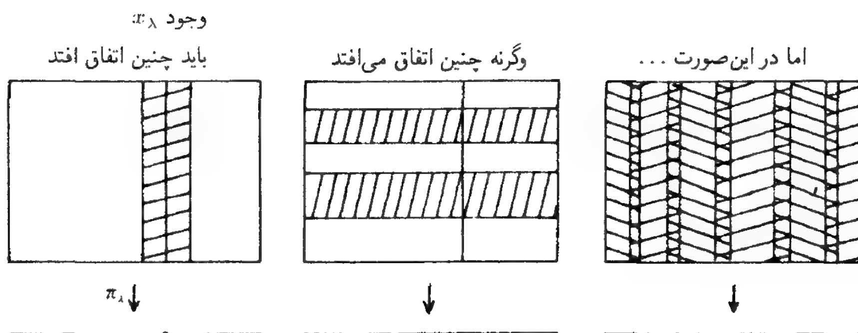
۳. برهان

در همهٔ برهانهای قضیهٔ تیخونوف، از «لم زُرن»[1] استفاده می‌شود، که ما نخست از آن صحبت خواهیم کرد. سپس، فرصت را غنیمت شمرده، مفاهیم پالایه[2] و فراپالایه[3] را وارد می‌کنیم، که در جاهای دیگر نیز مفیدند. پس از آنکه به‌این ابزارها مجهز شدیم، حکم زیر را ثابت می‌کنیم که: اگر یک فضای X یک زیر پایهٔ $\mathfrak{S}$ با این ویژگی داشته باشد که، هر پوشش X توسط مجموعه‌های عضو $\mathfrak{S}$ دارای یک زیرپوشش متناهی باشد، آنگاه X فشرده است. پس، برای آنکه این حکم را برای حاصلضربی از فضاهای فشرده چون $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ به‌کار بریم، کافی است ثابت کنیم که زیرپایهٔ متعارف استوانه‌های

$$\{\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda) | \lambda \in \Lambda, \text{بازاست} U_\lambda \subset X_\lambda\}$$

دارای ویژگی فوق است، و بدین ترتیب، قضیهٔ تیخونوف اثبات می‌شود. اول، باید به برقراری این ویژگی برای زیرپایه متقاعد شویم: با استفاده از برهان خلف، گیریم $\mathfrak{A}$ یک پوشش فضای حاصلضرب، توسط استوانه‌های باز باشد. فرض می‌کنیم $\mathfrak{A}$ زیرپوشش متناهی ندارد. در این‌صورت، در هر یک از سازه‌های X_λ، دست کم یک نقطهٔ x_λ هست که «صفحهٔ مختصاتی آن» $\pi_\lambda^{-1}(x_\lambda)$ با تعدادی متناهی از مجموعه‌های عضو $\mathfrak{A}$ پوشیده نمی‌شود، و دلیل آن‌هم این‌است: یک صفحهٔ مختصاتی که با تعدادی متناهی از استوانه‌های عضو $\mathfrak{A}$ پوشیده شود، اجباراً در یکی از این استوانه‌ها جا خواهد گرفت، وگرنه تعدادی متناهی از استوانه‌ها کل فضای حاصلضرب را خواهد پوشانید، و این هم برخلاف فرض است، و اما، اگر هر صفحهٔ مختصاتی روی X_λ در یک استوانهٔ عضو $\mathfrak{A}$ جا بگیرد، از فشردگی X_λ نتیجه می‌شود که تعدادی متناهی از استوانه‌ها، حاصلضرب را می‌پوشانند، و این هم برخلاف فرض است. لذا، برای هر λ، همان‌طور که ادعا کردیم، یک x_λ، با همان شرایط نامبرده، وجود دارد.

---
1 Zorn's lemma 2. filter 3. ultrafilter



حال قرار می‌دهیم $x := \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. در این‌صورت، x باید در یکی از استوانه‌های عضو $\mathfrak{A}$، مثل $\pi_\mu^{-1}(U_\mu)$، جای گیرد، و این مستلزم آن است که کل صفحهٔ مختصاتی $\pi_\mu^{-1}(x_\mu)$ مشمول استوانهٔ مورد نظر باشد، و این هم بر خلاف آن‌است که ساختیم. پس، فرض نادرست بوده است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱. لم زُرن. چنان‌که می‌دانید، غالباً به دلایلی، اشیاء ریاضیِ «ماکسیمال» یا «مینیمال» را در نوع بخصوصی بررسی می‌کنند. مثلاً، در بخش گذشته، از ایدآلهای ماکسیمال در یک جبر تعویضپذیر باناخ صحبت‌کردیم؛ یک ساختار دیفرانسیلپذیر بر یک خمینه، بنا بر تعریف، یک اطلس دیفرانسیلپذیر ماکسیمال است؛ در نظریهٔ گروههای لی، زیرگروههای فشردهٔ ماکسیمال یک گروه لیِ همبند، مهم‌اند؛ مجموعهٔ باز ماکسیمال مشمول در یک زیرفضای A از فضای توپولوژیک مفروض، درون آن، $\mathring{A}$، نامیده می‌شود، و مجموعهٔ بستهٔ مینیمال شامل A، بستار آن، $\overline{A}$، است؛ ریز بافت‌ترین و درشتبافت‌ترین توپولوژی با ویژگیهای مفروض، اعضای ماکسیمال و مینیمال در مجموعهٔ این توپولوژیها هستند؛ و. . . و. . . .

در موارد فراوانی، حتی می‌توان گفت در بیشتر موارد، اشیاء مورد بحث به‌صورت زیرمجموعه‌های ویژه‌ای از یک مجموعهٔ ثابت‌اند، و رابطهٔ ترتیبی که ماکسیمال بودن یا مینیمال بودن به‌آن اشاره دارد، رابطهٔ شمول مجموعه‌هاست. حال اگر این ویژگی به اجتماعهای دلخواه منتقل شود، اجتماع کلیهٔ مجموعه‌های واجد این ویژگی طبعاً مجموعهٔ ماکسیمال واجد این ویژگی است، و هنگامی‌که این ویژگی، به اشتراکهای دلخواه منتقل شود، اشتراک همهٔ این مجموعه‌ها مجموعهٔ مینیمال واجد این ویژگی است. این ساده‌ترین موردی است که وجود اشیاء ماکسیمال و مینیمال در آن تضمین می‌شود؛ ساختار دیفرانسیلپذیر شامل یک اطلس دیفرانسیلپذیر مفروض، و هم‌چنین درون و بستار یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیک، نمونه‌هایی از این نوع‌اند.

اما غالب اوقات، نباید توقع بیش از اندازه داشت و از این ویژگی مورد نظر خواست که به

اجتماعها یا اشتراکهای دلخواه منتقل شود. با وجود این، در اکثر موارد، باز شرط واقعاً ضعیفتری بر ویژگی مورد نظر حکم فرماست، و آن‌هم این‌است که ویژگی مورد نظر به اجتماع یا اشتراک زنجیر[1] هایی از مجموعه‌های واجد آن ویژگی، منتقل می‌شود. این نمونهٔ بارز از وضعیتی است که لم زرن در آن به‌کار می‌رود و وجود مجموعه‌های ماکسیمال یا مینیمال با ویژگی مطلوب، تضمین می‌شود.

بلافاصله باید توجه کرد که لم زرن نیز در همهٔ موارد کارگر نیست. مثلاً، برای اثبات وجود زیرگروههای فشردهٔ ماکسیمال در هرگروه همبندِ لی، باید نسبتاً به اعماق نظریهٔ گروههای لی رفت. فقط یک استدلال صوری و صرفاً نظریهٔ مجموعه‌یی، مثل لم زرن، نمی‌تواند به نتیجه برسد.

برهان لم زرن در فصل آتی خواهد آمد، اما در اینجا، صورت آن‌را به سرعت مرور می‌کنیم: چنان‌که می‌دانیم، یک رابطهٔ $\leqslant$ («کمتر از یا برابر با»[2]) در یک مجموعهٔ M را یک ترتیب جزیی[3] نامند هرگاه بازتابی ($x \geqslant x$)، پاد متقارن ($x \leqslant y$ و $y \leqslant x \Rightarrow x = y$) و ترایا ($x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$) باشد. یک زیرمجموعهٔ $K \subset M$ را یک زنجیر گویند هرگاه هر دو عضو آن باهم مربوط باشند، یعنی برای $x, y \in K$، یا $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$. هم‌چنین، K راکراندار[4] گویند هرگاه عضوی مانند $m \in M$ موجود باشد به قسمی که، برای هر $x \in K$، $x \leqslant m$.

لم زُرن. اگر هر زنجیر در یک مجموعهٔ مرتب جزئی و نا تهی $(M, \leqslant)$، کراندار باشد، M دست کم یک عضو ماکسیمال دارد، یعنی یک عضو a هست به قسمی که هیچ xی وجود ندارد که $x \neq a$ و $a \leqslant x$.

۲. پالایه‌ها و فرا پالایه‌ها

تعریف (پالایه). منظور از یک پالایهٔ $\mathscr{F}$ در یک فضای توپولوژیک X (یا، به‌طور کلیتر، در یک مجموعهٔ X)، مجموعه‌ای است از زیر مجموعه‌های X که در سه اصل موضوع زیر صدق کند:

اصل موضوع ۱. $F_1, F_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$

اصل موضوع ۲. $F \in \mathscr{F}$ و $F \subset F' \Rightarrow F' \in \mathscr{F}$

اصل موضوع ۳. $\varnothing \notin \mathscr{F}$

تعریف (همگرایی پالایه‌ها). یک پایهٔ $\mathscr{F}$ در یک فضای توپولوژیک X همگرا به a است، هرگاه هر همسایگی a متعلق به $\mathscr{F}$ باشد.

---

1. chain 2. less than or equal to 3. partial ordering 4. bounded

مثال. فرض می‌کنیم $(x_n)_{x\geqslant 1}$ دنباله‌ای در X و $\mathscr{F}$ پالایهٔ همهٔ مجموعه‌هایی باشد که این دنباله سرانجام در آنها می‌ماند. در این‌صورت، واضح است که این پالایه همگرا به a است، اگر و تنها اگر، خود دنباله همگرا به a باشد.

تعریف (فراپالایه) **و نتیجهٔ لم زُرن.** پالایه‌های ماکسیمال را فرا پالایه نامند. هر پالایه، مشمول در یک فراپالایه است.

واضح است که در اینجا، لم زرن، برای مجموعهٔ جزئاً مرتب همهٔ پالایه‌های شامل پالایهٔ مفروض، به‌کار رفته است.

فرا پالایه‌ها، ویژگی جالب زیر را دارند:

گزاره. اگر $\mathscr{F}$ یک فرا پالایه در X و $A \subset X$ زیرمجموعه‌ای دلخواه باشد، آنگاه یکی، و دقیقاً یکی، از زیرمجموعه‌های A و $X\setminus A$ به $\mathscr{F}$ متعلق است.

برهان. بدیهی است که هر دو نمی‌توانند به $\mathscr{F}$ متعلق باشند، زیرا اشتراک آنها تهی است. به‌علاوه، یکی از این دو مجموعه، باید هر مجموعهٔ عضو $\mathscr{F}$ را قطع کند، زیرا در غیر این‌صورت، یک مجموعهٔ عضو پالایه خارج از A، و یکی هم خارج از $X\setminus A$ در نظر می‌گیریم؛ اشتراک این دو مجموعه نیز تهی خواهد بود. پس، بی آنکه از کلیت کاسته شود، فرض می‌کنیم که A همهٔ اعضای $\mathscr{F}$ را قطع کند. در این‌صورت، مجموعهٔ همهٔ فوق مجموعه[1] های کلیهٔ اشتراکهای $A \cap F$، $F \in \mathscr{F}$، تشکیل یک پالایه می‌دهند که شامل $\mathscr{F} \cup \{A\}$ است، و از ماکسیمال بودن $\mathscr{F}$ نتیجه خواهد شد که $A \in \mathscr{F}$. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

۳.کاربرد (برهان قضیهٔ تیخونوف). با این مقدمات، فرض‌کنیم $\mathfrak{S}$ زیر پایه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد با این ویژگی که هر پوشش X توسط مجموعه‌های عضو $\mathfrak{S}$، یک زیر پوشش متناهی را بپذیرد.

مرحلهٔ ۱: هر فرا پالایه در X همگراست.

برهان. فرض کنیم یک فراپالایهٔ ناهمگرای $\mathscr{F}$ وجود داشته باشد. در این‌صورت، برای هر $x \in X$، یک همسایگی $U_x \in \mathfrak{S}\setminus\mathscr{F}$ می‌توانیم پیدا کنیم: زیرا، اگر همهٔ مجموعه‌های عضو $\mathfrak{S}$ که شامل x هستند اعضای پالایهٔ مورد نظر بودند، آنگاه همهٔ اشتراکهای متناهی نیز در پالایه می‌بودند، و پالایه همگرا به x می‌شد. لذا، بنا بر فرض، پوشش $\{U_x\}_{x\in X}$ دارای یک زیرپوشش $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_r}$.

1. superset

است. از آنجاکه U_{x_i} ها عضو $\mathscr{F}$ نیستند، بنابر ویژگی جالب فوق، باید متممهای آنها در فراپالایه باشند. اما، اشتراک متممها تهی است، و به یک تناقض با اصول موضوعهٔ پالایه می‌رسیم. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

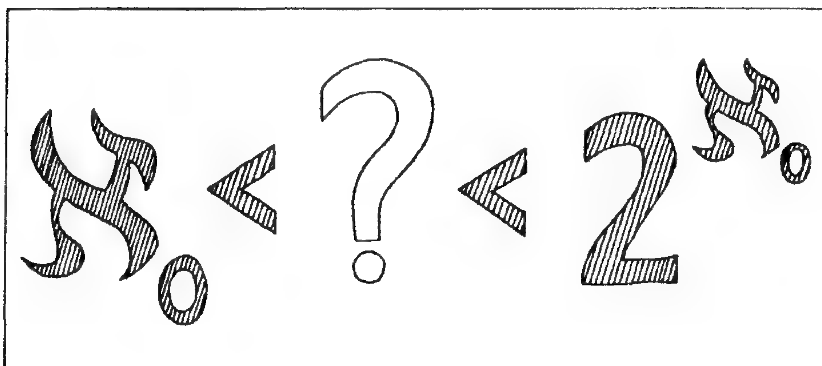
مرحلهٔ دوم (آخرین مرحله): X فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک پوشش باز دلخواه X باشد. فرض کنیم زیرپوشش متناهی وجود نداشته باشد، یعنی برای هر زیر خانوادهٔ متناهی از پوشش، یک مجموعهٔ «کاستی» ناتهی $X\backslash U_{\alpha_1}\cup\cdots\cup U_{\alpha_l}$ باقی بماند. مجموعهٔ فوقِ مجموعه‌های این کاستیها، تشکیل یک پالایه می‌دهند. فرض کنیم $\mathscr{F}$ فرا پالایهٔ شامل این پالایه باشد. به موجب مرحلهٔ ۱، می‌دانیم که $\mathscr{F}$ به یک $a\in X$ همگراست. این a باید در یکی از مجموعه‌های عضو پوشش مفروض، چون U_α، قرار گیرد. پس، به موجب همگرایی، $U_\alpha\in\mathscr{F}$. اما $X\backslash U_\alpha$ یک کاستی است و لذا $X\backslash U_\alpha\in\mathscr{F}$، و این هم با اصول موضوعهٔ پالایه متناقض است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

و بدین شکل، آخرین سنگ برهان قضیهٔ تیخونوف را کارگذاشتیم.

فصل آخر

نظریهٔ مجموعه‌ها



نوشتهٔ تئودور بروکر[1]

هدف این فصل بالا بردن دقت یا فداکردن آن نیست. هدف آن، صرفاً تلخیص آن مقدار از تکنیکهای نظری مجموعه‌هاست که گهگاه مورد استفادهٔ ریاضیدانان واقع می‌شود، و دانستن آنها برای دانشجویانی که نیمسال اول تحصیل خود را با موفقیت به‌پایان رسانده‌اند لازم است.

اگر Λ یک مجموعه باشد و به هر $\lambda \in \Lambda$ یک مجموعهٔ M_λ وابسته شده باشد، حاصلضرب مجموعه‌های M_λ را، که با $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ نمایش می‌دهیم، به‌صورت مجموعهٔ نگاشتهای $\varphi : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ با شرط $\varphi(\lambda) \in M_\lambda$، تعریف می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، این حاصلضرب، برابر است با مجموعهٔ خانواده‌های

---

1. Theodor Bröcker

$$(m_\lambda | \lambda \in \Lambda, m_\lambda \in M_\lambda)$$

اصل موضوع انتخاب[1]. اگر برای هر $\lambda \in \Lambda$، $M_\lambda \neq \varnothing$، آنگاه $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \neq \varnothing$.
پس معنی این اصل این‌است که اگر در هر M_λ عضوی موجود باشد، تابعی نیز وجود دارد که از هر یک از M_λها یک عضو انتخاب می‌کند.

یک ترتیب جزئی بر یک مجموعهٔ M، رابطه‌ای است مانند $\leq$ بین اعضای M که در اصول زیر صدق می‌کند (برای هر $x, y, z \in M$):

$$x \leq x, \quad \text{(بازتابی)}$$
$$x \leq y \quad \text{و} \quad y \leq x \Rightarrow x = y, \quad \text{(پادتقارنی)}$$
$$x \leq y \quad \text{و} \quad y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad \text{(ترایایی)}$$

همچنین، اگر $x \leq y$ و $x \neq y$، می‌نویسیم $x < y$. اگر $x \in M$ و $A \subset M$، و برای هر $a \in A$ رابطهٔ $x \geq a$ برقرار باشد، می‌نویسیم $x \geq A$، و به شکل مشابه، $x > A$، $x < A$ و غیره.

چند مثال. اگر M یک مجموعه و P مجموعهٔ زیر مجموعه‌های آن باشد، آنگاه رابطهٔ شمول، معرّف یک ترتیب جزئی بر P است. از این مثال، ترتیب جزئی در زیر گروههای یک گروه، در زیر فضاهای یک فضای برداری، و غیره استخراج می‌شود.

یک زنجیر[2] یا یک مجموعهٔ مرتب خطی[3]، مجموعهٔ جزئاً مرتّبی است که شرط زیر در آن صادق باشد: برای هر $x, y \in M$، یا داریم $x \leq y$ یا $y \leq x$. زنجیر را خوشترتیب[4] گویند اگر هر زیر مجموعهٔ ناتهیِ آن دارای کوچکترین عضو (نسبت به ترتیبِ آن) باشد. مثال: $\mathbb{N}$ خوشترتیب است، اما $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ خوشترتیب نیستند. اگر M و N خوشترتیب باشند، روشن است که $M \times N$ نیز با ترتیب الفبایی[5] خوشترتیب است، منظور از ترتیب الفبایی این‌است: $(m, n) < (m_1, n_1)$ هرگاه $m < m_1$، یا $m = m_1$ ولی $n < n_1$. همچنین است $M + N$ (اجتماع جدا ازهم) با ترتیب $m < n$ برای $m \in M$ و $n \in N$، و رعایت ترتیب قبلی برای دو عضو M یا دو عضو N.

در یک مجموعهٔ خوشترتیب، اصل زیر صادق است:

اصل استقراء.[6] اگر $A(k)$ حکمی دربارهٔ یک عضو دلخواه $k \in K$ باشد، و اگر $A(l)$ برای هر $l < k$، مستلزم $A(k)$ باشد، آنگاه برای هر $k \in K$، حکم $A(k)$ صادق است.

برهان. در غیر این‌صورت، اجباراً کوچکترین عنصر $k \in K$ موجود خواهد بود به‌قسمی که $A(k)$ دروغ باشد. پس در این‌صورت $A(l)$ برای هر $l < k$ صادق بوده، و لذا خود $A(k)$ نیز صادق خواهد بود و این تناقض است. □

---

1. axiom of choice 2. chain 3. linearly ordered set 4. well-ordered
5. lexicographical ordernig 6. induction principle

به‌همان طریق که در مورد اعداد طبیعی عمل می‌شود، می‌توان در یک مجموعهٔ خوشترتیب، اشیاء را به‌روش بازگشتی[1] تعریف کرد. مثلاً، یک دستور بازگشتی برای یک تابع f بر M، تثبیت‌کنندهٔ مقدار $f(n)$، برحسب مقادیر $f(k)$ برای $k < n$ است، یعنی:

$$f(n) = \varphi(f|\{k|k < n\})$$

به استقراء روی n، ثابت می‌شود که دقیقاً یک تابع f بر زیرمجموعه‌های $\{k \in M|k \leq n\}$ موجود است که در دستور بازگشتی صدق می‌کند، و لذا بر خود مجموعهٔ M نیز، یک تابع و فقط یکی وجود دارد که چنین است، زیرا یک تابع f بر M به‌کمک تحدیدهایش به‌شکل $f|\{k \leq n\}$ کاملاً مشخص می‌شود.

در این مورد، ممکن است این استدلال آورده شود که حکم «f از روی دستور بازگشتی برای جمیع مقادیر n به‌طور یکتا معیّن می‌شود» به استقراء روی n نتیجه می‌شود. ولی این، حکمی به‌شکل «برای هر n شرط زیر برقرار است: ...» نیست، که بتواند مستقیماً به استقراء ثابت شود.

*

مهمترین ابزار در نظریهٔ مجموعه‌ها، و حاصل از آن، لم زیر است:

لم زُرن.[2] (که اساساً از آنِ زرملو[3] است). گیریم $(M, \leq)$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد. فرض کنیم که هر زنجیر $K \subset M$ کراندار است. در این‌صورت، M یک عضو ماکسیمال دارد، یعنی عضوی مانند $a \in M$ موجود است به‌قسمی که هیچ $x \in M$ در $x > a$ صدق نمی‌کند.

برهان. فرض کنیم که این لم برقرار نیست. در این‌صورت، می‌توان به هر زنجیر $K \subset M$ یک عضو $m(K) \in M$ وابسته کرد به قسمی که $m(K) > K$. در اینجا از اصل موضوع انتخاب استفاده کرده‌ایم. یک زنجیر $K \subset M$ را ممتاز[4] نامیم هرگاه K خوشترتیب باشد و، برای هر زیر مجموعهٔ آغازی[5] $K_x := \{k \in K|k < x\}$، داشته باشیم $x = m(K_x)$.

لم. اگر K و L زنجیرهایی ممتاز باشند، آنگاه $K = L$ و یا به‌ازای مقداری از x به‌ترتیب متعلق به K یا L، داریم: $K_x = L$ و یا $L_x = K$.

برهان لم. فرض کنیم که در هیچ‌یک از دو حالت نخست نیستیم. در این صورت، به استقراء روی K، حکم زیر را ثابت می‌کنیم:

$$x \in K \Rightarrow x \in L \text{ و } K_x = L_x$$

1. recursively 2. Zorn's Lemma 3. Zermelo 4. distinguished
5. initial subset

برهان حکم. اگر چنین نباشد، باید کوچکترین xای که $x \in K$ و حکم برایش صادق نیست موجود باشد. پس، عجالتاً داریم $K_x \subset L$ (زیرا $K_x < x$)، و بنابر فرض $K_x \neq L$؛ حال فرض کنیم که $z \in L$ با ویژگی $z \notin K_x$ مینیمال باشد. در این‌صورت، $z > K_x$، وگرنه برای برخی از yهای عضو K، می‌بایست داشته باشیم $x > y > z$، اما در آن صورت، چون حکم برای y صادق است، لذا $y \in L$ و $K_y = L_y$، پس $z \in L_y$. در نتیجه، $z \in K_x$، که با انتخاب z متناقض است.

پس حالا داریم $z > K_x$، و روشن است که $K_x = L_x$. اما، در این‌صورت

$$x = m(K_x) = m(L_z) = Z$$

بدین‌ترتیب، برهان حکم به‌پایان می‌رسد. از حکم فوق، نتیجه می‌شود که $K \subset L$، و چون به‌ازای مقدار مینیمالِ عضو $z \in L$ با شرط $z \notin K$، داریم $K = L_z$، اثبات لم نیز به‌پایان می‌رسد. □

از اینجا به‌آسانی نتیجه می‌شود که اجتماع همهٔ زنجیرهای ممتاز، زنجیری است ممتاز. این زنجیر ممتاز را A می‌نامیم. پس $m(A) > A$، و $A \cup \{m(A)\}$ نیز ممتاز است، اما در این‌صورت، باید

$$A \cup \{m(A)\} \subset A$$

که یک تناقض است، زیرا $m(A) \notin A$. بدین‌ترتیب، برهان لم زرن به‌پایان می‌رسد. □

تعریف. دو مجموعهٔ M و N یک عدد اصلی[1] دارند، $|M| = |N|$، هرگاه یک نگاشت دوسویی $\varphi : M \to N$ موجود باشد. همچنین می‌نویسیم $|M| \leqslant |N|$ هرگاه یک نگاشت یک‌به‌یک $\varphi : M \to N$ موجود باشد.

بدیهی است که اگر $|M| \leqslant |N|$ و $|N| \leqslant |S|$، آنگاه $|M| \leqslant |S|$.

قضیه (شرودر- برنشتاین).[2]

$$|M| \leqslant N \& |N| \leqslant |M| \Rightarrow |M| = |N| \quad \text{(i)}$$

$$|M| \leqslant N \quad \text{یا} \quad |N| \leqslant |M| \quad \text{(ii)}$$

برهان. (i) فرض کنیم $\varphi : M \to N$ و $\psi : N \to M$ یک‌به‌یک باشند. می‌خواهیم یک نگاشت دوسویی $\gamma : M \to N$ پیدا کنیم. هر عضو $m \in M$ و هر عضو $n \in M$، با رعایت انتقال

1. cardinality 2. Schröder-Bernstein

مناسب اندیسها، دقیقاً در یک دنباله به‌شکل

$$\cdots \underset{\psi}{\mapsto} m_{-۲} \underset{\varphi}{\mapsto} n_{-۲} \underset{\psi}{\mapsto} m_{-۱} \underset{\varphi}{\mapsto} n_{-۱} \underset{\psi}{\mapsto} m_o \underset{\varphi}{\mapsto} n_o \underset{\psi}{\mapsto} m_۱ \underset{\varphi}{\mapsto} n_۱ \mapsto \cdots$$

که m_νها عضو M و n_νها عضو Nاند، به‌ترتیب به‌صورت m_ν و n_ν ظاهر می‌شوند. حال γ را چنین تعریف می‌کنیم: اگر دنباله‌ای که m در آن ظاهر می‌شود، با یک $m_\nu \in M$ شروع شود (و خصوصاً عضو ابتدا داشته باشد)، $\gamma(m)$ را با تساوی $\gamma(m) = \varphi(m)$ تعریف می‌کنیم، و در غیر این‌صورت، با تساوی $\gamma(m) = \psi^{-۱}(m)$. بدین‌ترتیب، γ همواره خوشتعریف و دوسویی است.

(ii) مجموعهٔ سه‌گانه‌هایی چون $A \underset{\varphi}{\rightarrow} B$ را که در آن $A \subset M$ و $B \subset N$ و φ دوسویی است، در نظر می‌گیریم. رابطهٔ $<$ را بین این سه‌گانه‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A \underset{\varphi}{\rightarrow} B) < (A_۱ \underset{\varphi_۱}{\rightarrow} B_۱)$$

اگر $A \subset A_۱$، $B \subset B_۱$ و $\varphi = \varphi_۱|A$. بدین‌طریق، یک ترتیب جزئی روی مجموعهٔ این سه‌گانه‌ها تعریف می‌شود، و هر زنجیر $(A_\lambda \underset{\varphi_\lambda}{\rightarrow} B_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ کراندار خواهد شد به سه‌گانهٔ $A = \bigcup_\lambda A_\lambda \underset{\varphi}{\rightarrow} \bigcup_\lambda B_\lambda = B$، که $\varphi|A_\lambda = \varphi_\lambda$. حال، به‌کمک لم زرن، $A \underset{\varphi}{\rightarrow} B$ را ماکسیمال می‌گیریم. در این‌صورت، روشن است که $A = M$ یا $B = N$، در غیر این‌صورت می‌توان $m \in M$ و $n \in N$ پیدا کرد که $m \notin A$ و $n \notin B$، سپس $A \underset{\varphi}{\rightarrow} B$ را به‌کمک $m \mapsto n$ به $A \cup \{m\} \rightarrow B \cup \{n\}$ توسیع داد. □

تعریف. مجموعهٔ زیرمجموعه‌های M را مجموعهٔ توانی[1] می‌نامند و با $\mathfrak{P}(M)$ نشان می‌دهند.

قضیه (کانتور). $|\mathfrak{P}(M)| > |M|$. همچنین می‌نویسیم $|\mathfrak{P}(M)| := ۲^{|M|}$.

برهان. در غیر این‌صورت، یک نگاشت دوسویی

$$M \rightarrow \mathfrak{P}(M), x \mapsto M(x)$$

وجود خواهد داشت. یک زیر مجموعهٔ $A \subset M$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin M(x)$$

باید به‌ازای $y \in M$ داشته باشیم $A = M(y)$، در نتیجه

$$y \in A \Leftrightarrow y \notin M(y) = A$$

1. power set

این تناقض است. □

قضیه. هر مجموعه‌ای می‌تواند خوشترتیب شود.

برهان. به‌ازای یک مجموعهٔ مفروض M، مجموعهٔ زوجهای (A, R) را، که در آن $A \subset M$ و R یک خوشترتیبی در مجموعهٔ A است، در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $(A_1, R_1) \leqslant (A_2, R_2)$ اگر $A_1 \subset A_2$، و رابطهٔ $a \leqslant b$ در A_1 نسبت به R_1 برقرار است اگر و تنها اگر رابطهٔ $a \leqslant b$ در A_2 نسبت به R_2 برقرار باشد. بدین طریق، یک ترتیب جزئی در مجموعهٔ زوجهای (A, R) تعریف می‌شود. هر زنجیر $\{(A_\lambda, R_\lambda)\}$ توسط $A = \bigcup_\lambda A_\lambda, R|A_\lambda = R_\lambda$ کراندار می‌شود. یک عضو ماکسیمال (A, R) باید در شرط $A = M$ صدق کند. در غیر این‌صورت، یک $m \in M$ را، که $m \notin A$، در نظر می‌گیریم و $A \cup \{m\}$ را با خوشترتیبی در A و شرط $A < m$، خوشترتیب می‌سازیم. لذا، زوج $(A \cup \{m\}, \leqslant)$ از (A, R) بزرگتر خواهد شد. □

به‌همان طریقی که اعداد اصلی را از روی مجموعه‌ها و نگاشتهای یک‌به‌یک می‌سازیم، اعداد ترتیبی[1] را نیز از روی مجموعه‌های خوشترتیب و نگاشتهای یک‌به‌یک یکنوا[2] به‌دست می‌آوریم. دو مجموعهٔ خوشترتیب یک عدد ترتیبی[3] دارند هرگاه یک نگاشت دوسویی ترتیب ـ نگهدار[4] بین آنها موجود باشد.

قضیه. فرض می‌کنیم M و N خوشترتیب باشند. در این‌صورت، دقیقاً یک نگاشت دوسویی یکنوا از یکی از مجموعه‌ها به روی دیگری یا به روی زیرمجموعه‌ای آغازی[5] از دیگری وجود دارد. بالأخص اعداد ترتیبی، خطّی ـ مرتب‌اند.

برهان. فرض‌کنیم نگاشت دوسویی یکنوایی به‌شکل $M \to N$ یا $M \to N_x$ موجود نباشد. در این‌صورت، $\varphi : N \to M_y$ را به استقراء تعریف می‌کنیم: اگر φ قبلاً روی N_x تعریف شده باشد و برای $z \in M$ ی داشته باشیم $\varphi(N_x) = M_z$، آنگاه قرار می‌دهیم $\varphi(x) = z$؛ اگر $N_x \cup \{x\} \neq N$، آنگاه $N_x \cup \{x\}$ نیز یک قطعهٔ آغازی[6] در N است و $\varphi(N_x) \cup \{z\}$ یک قطعهٔ آغازی در M. روشن است که $\varphi(N)$ به استقراء تعریف شده و $\varphi(N) = M_y$، که y در M مینیمال است، لذا $y \notin \varphi(N)$، همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

به‌ویژه اگر M خوشترتیب باشد، اعداد اصلیِ کوچکتر از $|M|$ به‌وسیلهٔ زیر مجموعه‌های M، و لذا

1. ordinals 2. monotonic 3. ordinal 4. order-preserving
5. initial subset 6. initial segment

به‌وسیلهٔ قطعات آغازی M_x از M، نمایش داده می‌شوند (به‌موجب قضیهٔ فوق)، و

$$|M_x| \leqslant |M_y| \Leftrightarrow x \leqslant y$$

پس:

نتیجه. دقیقاً یک نگاشت دوسویی یکنوا از مجموعهٔ اعداد اصلی کوچکتر از $|M|$ به روی یک قطعهٔ آغازی مجموعهٔ خوشترتیب M وجود دارد. به‌ویژه، مجموعهٔ اعداد اصلی نابزرگتر از $|M|$، به‌وسیلهٔ ترتیب خودشان خوشترتیب شده است، و $|M|$ توسط مجموعهٔ اعداد ترتیبی نابزرگتر از عدد ترتیبی M نمایش داده می‌شود.

قضیه. برای یک مجموعهٔ نامتناهی M، داریم $|M| = |M \times M|$ و $|M| = |M + M|$ که در آن، $+$، معرّف اجتماع جدا ازهم است.

فرع. اگر $|M|$ نامتناهی باشد، و $N \neq \varnothing$، آنگاه

$$|M \times N| = |M + N| = \max\{|M|, |N|\}$$

برهان. از حکم نخست نتیجه می‌شود که

$$|M| = |M \times M| \geqslant |M \times \{۱, ۲\}| = |M + M| \geqslant |M|;$$

و بدین‌ترتیب، حکم دوم برای همان عدد اصلی برقرار خواهد شد.

برهان حکم نخست. مجموعهٔ زوجهایی مانند (B, ψ) را در نظر می‌گیریم که در آنها $B \subset M$ نامتناهی است و $\psi : B \to B \times B$ دوسویی. اگر $|B| = |\mathbb{N}|$، یقیناً یک نگاشت دوسویی آن‌گونه که می‌خواهیم وجود دارد (شمارش یک‌به‌یک $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). طبق معمول، بین زوجهای (B, ψ)، ترتیب $(B, \psi) \leq (B_۱, \psi_۱)$ را با ضابطهٔ $B \subset B_۱$ و $\psi = \psi_۱|B$، در نظر می‌گیریم. حال، لم زرن، یک زوج ماکسیمال (A, φ)، $\varphi : A \times A \to A$، به‌دست می‌دهد. فرض کنیم $|A| < |M|$. در این‌صورت، $M = A + B$ و $|A| < |B|$ طبق فرض استقراء (استقراء روی عدد اصلی مجموعه). پس $M = A + A_۱ + C$ که $|A| = |A_۱|$. حال، گوییم

$$(A + A_۱) \times (A + A_۱) = (A \times A) + (A \times A_۱) + (A_۱ \times A) + (A_۱ \times A_۱)$$

و بنابر فرض استقراء، یک نگاشت دوسویی مانند

$$A_۱ \vec{\varphi}_۱ (A \times A_۱) + (A_۱ \times A) + (A_۱ \times A_۱)$$

موجود است. بدین شکل، $\varphi_۱$ توسیعی از φ به‌دست می‌دهد، یعنی یک نگاشت دوسویی،

$$A + A_۱ \to (A + A_۱) \times (A + A_۱)$$

که روی A بر φ منطبق است، و این متناقض با ماکسیمال بودن φ است. قضیه، بدین‌ترتیب ثابت می‌شود. □

فرض کنیم $|M|$ نامتناهی باشد و K مجموعهٔ اعداد اصلی κ باشد به‌قسمی که

$$|M| < \kappa < ۲^{|M|}$$

از نتیجهٔ قضیهٔ پیش، برآورد زیر به‌دست می‌آید:

$$o \leq |K| \leq ۲^{|M|}$$

فرض پیوستار[1] کانتور می‌گوید که $|K| = o$. بنابر قضیه‌ای از کوهن[2]، این فرض مستقل از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌هاست، و در داخل برآورد فوق، همهٔ فرضهای ممکن، با اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است. فرض پیوستار، ایجاب می‌کند که هیچ عدد اصلی بین $|\mathbb{N}|$ و $|\mathbb{R}|$ موجود نباشد؛ نام این فرض، از همینجا گرفته شده است.

مراجع

[1] Bourbaki, N., *Eléments de Mathématique*, Livre V: Espaces Vectoriels Topologiques, Chaps. I and II, 2nd ed., Paris: Hermann, 1966.

[2] Bourbaki, N., *General Topology*, Vols. I and II, Paris: Hermann and Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1966.

[3] Bröcker, Th. and Jänich, K., *Introduction to Differential Topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[4] Dieudonné, J. A., *Treatise on Analysis*, Vol. II, New York and London: Academic Press, 1970.

[5] Lold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972.

[6] Dold, A., Partitions of unity in the theory of fibrations, *Ann. of Math.*, **78**, (1963), 223–255.

1. continuum hypothesis 2. Cohen

[7] Dunford, N. and Schwartz, J. T., *Linear Operators*, Part I: General Theory, New York: Interscience, 1957.
[8] Dunford, N. and Schwartz, J. T., *Linear Operators*, Part II: Spectral Theory, New York: Interscience, 1963.
[9] Forster, O., *Lectures on Riemann Surfaces*, New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1981.
[10] Grauert, H. and Remmert, R., *Theory of Stein Spaces*, New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1979.
[11] Hilton, P. J., *An Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1953.
[12] Jänich, K., *Einführung in die Funktionentheorie*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1977.
[13] Köthe, G., *Topological Vector Spaces*, I, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1966.
[14] Milnor, J., *Morse Theory*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1963.
[15] Neumann, J. v., Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, *Math. Annalen*, **102** (1930), 370–427.
[16] Schubert, H., *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, 1968.
[17] Steen, L. A. and Seebach, J. A., *Counterexamples in Topology*, 2nd ed., New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1978.
[18] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 17–86.
[19] Tychonoff, A., Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Annalen*, **102** (1930), 544–561.
[20] Tychonoff, A., Ein Fixpunktsatz, *Math. Annalen*, **111** (1935), 767–780.
[21] Wolf, J. A., *Spaces of Constant Curvature*, New York: McGraw-Hill, 1967.

فهرست نمادها

$[a, b]$ بازهٔ بسته از a تا b

$\mathring{B}$ درون مجموعهٔ B

$\overline{B}$ بستار B

$K_\varepsilon(x)$ گوی به‌شعاع ε حول نقطهٔ x از یک فضای متری

$+$ اجتماع جدا از هم، حاصلجمع توپولوژیک

$\cong$ «یکریخت» که اینجا در مورد همسانریختیها به‌کار می‌رود

(۲,۳) بازهٔ باز از ۲ تا ۳ (هنوز به علامتگذاری نفرت‌انگیز]۲,۳[عادت نکرده‌ام؛ البته روزی عادت خواهم کرد، آدمی به‌همه چیز عادت می‌کند). خطر اشتباه با زوج مرتب $(۲,۳) \in \mathbb{R}^{۲}$ وجود دارد.

$\| \cdot \cdot \|$ نرم

$| \cdot \cdot |$ نیم نرم

$C(X)$ فضای باناخ متشکّل از توابع پیوستهٔ کراندار بر X

$[x]$ ردهٔ هم‌ارزی

$X/\sim$ مجموعه یا فضای رده‌های هم‌ارزی برحسب رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ بر مجموعهٔ X

G/H فضای خارج‌قسمت G بر زیرگروه H

X/G فضای مداری G ـ فضای X

X/A فضای خارج‌قسمت حاصل از چسباندن $A \subset X$ به یک نقطه

CX مخروط روی X

$X \vee Y$	حاصلضرب گووه‌یی $X \times y_o \cup x_o \times Y \subset X \times Y$
$X \wedge Y$	حاصلضرب رحلی $X \times Y/X \vee Y$
$Y \cup_\varphi X$	فضای خارج‌قسمت حاصل از $X + Y$ با یکی‌گرفتن x و $\varphi(x)$ «چسباندن X به Y به‌وسیلهٔ φ»
$M_۱\#M_۲$	حاصلجمع همبند
$X \times [o,۱]/\alpha$	فضای خارج‌قسمت حاصل از $X \times [o,۱]$ با یکی‌گرفتن (x,o) و $(\alpha(x),۱)$.
$(\hat{X},\hat{d})$	فضای تکمیلی یک فضای متری (X,d)
$C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$	فضای برداری توابع C^∞ با محمل فشرده
$\simeq$	مانسته جا
$\simeq$	هم‌ارزی مانسته جایی
$[X,Y]$	مجموعهٔ رده‌های مانسته‌جایی نگاشتهای از X بتوی Y
$\pi_n(X,x_o)$	گروه مانسته جایی n ـ ام (X,x_o)
$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	حاصلضرب خانوادهٔ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از مجموعه‌ها یا فضاهای توپولوژیک
$s(u_o,\cdots,u_k)$	سادک،پوش محدب نقاط $v_o,\cdots,v_k$ در وضعیت عام در $\mathbb{R}^n$
$\vert K\vert$	مجموعهٔ زیربنایی یک مجتمع سادکی
X^n	n ـ کالبدی یک تجزیهٔ حجره‌یی برای X
TM	کلاف مماسی
Y_x	تارِ یک فضای توپولوژیک $Y \xrightarrow{\pi} X$ بالای X، در نقطهٔ x
$Y\vert U$	تحدید یک فضای توپولوژیک بالای X به $U \subset X$
$\cong$	یکریخت؛ در اینجا برای همسانریختیهای «بالای X» به‌کار می‌رود
$\sim$	وقتی بالای یک نگاشت نوشته شده باشد: در فصل ۹ اکثراً برای «بالابریهای» مختلف به‌کار می‌رود.
α^-	راهی که در جهت عکس پیموده شود، یعنی $\alpha^-(t) := \alpha(۱-t)$
$\Omega(X,x_o)$	مجموعهٔ طوقه‌های فضای X در نقطهٔ x_o
$\simeq$	در اینجا: مانسته جایی طوقه‌ها با نقاط انتهایی ثابت x_o
$[\ ]$	در اینجا:رده‌های هم‌ارزی طوقه‌ها برای $\simeq$
$\pi_۱(X,x_o)$	گروه اساسی
f_*	همریختی ناشی از f میان گروههای اساسی
$G(Y,y_o)$	زیرگروه مشخصهٔ $\pi_۱(X,x_o)$ برای فضای پوششی

	$(Y, y_o) \to (X, x_o)$
$[\ ]_\sim$	(فقط در صفحات ۱۸۶ و ۱۹۱) رده‌های هم‌ارزی رابطهٔ تعریف‌شده در صفحهٔ ۱۸۶
$V(U, y)$	(فقط در صفحات ۱۸۷ تا ۱۹۱) نمادگذاری ویژه‌ای است که در برهان قضیه‌ای لازم است
$\mathscr{D}$	گروه تبدیلات پوششی
N_B	نرمالساز زیرگروه B
$(\widetilde{X}, \widetilde{x}_o)$	پوشش عام برای (X, x_o)
X'	فضای دوگان یک فضای نرم‌دار X
$\text{Spec } B$	طیف یک جبر جابه‌جایی باناخ
βX	توسیع فشردهٔ استون ـ چخ برای X
$\mathscr{F}$	پالایه
$\|M\|$	عدد اصلی مجموعهٔ M
$۲^{\|M\|}$	عدد اصلی مجموعهٔ توانی M
$\|\mathbb{N}\|$	عدد اصلی مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$؛ آن را با $\aleph_o$ (الف صفر) نیز نمایش می‌دهند.

نمایه

این راهنمای موضوعی برمبنای الفبای انگلیسی تنظیم شده است. معادلهای انگلیسی واژه‌ها همراه با توضیح آنها، نمایه را به‌شکل یک فرهنگ اختصاری توپولوژیک درآورده است. اعداد فارسی معرّف شمارهٔ صفحات متن ترجمهٔ کتاب است.

تجزیهٔ حجره‌یِ یک فضای توپولوژیک X: افراز X به زیرفضاهایی که حجره‌اند.

زنجیر ۲۱۹ chain

نگاشت مشخصه ۱۲۵ characteristic map

نگاشت مشخصه برای یک n ـ حجرهٔ e در تجزیهٔ حجره‌یی یک فضای X: نگاشت پیوسته‌ای است مانند $D^n \to X$ که گویهای باز را به‌طور همسانریخت برروی e و مرزگوی S^{n-1} را بتوی $(n-1)$ـ کالبد، بنگارد.

زیر گروه مشخصهٔ یک فضای پوششی ۱۸۱

characteristic subgroup of a covering space

نگارهٔ گروه بنیادی «بالایی» در گروه بنیادی «پایینی».

رده‌بندی فضاهای پوششی ۱۸۴ classification of covering spaces

متشکّل است از قضیهٔ یکتایی و قضیهٔ وجود.

صورتهای کلیفرد ـ کلاین ۲۰۲ Clifford-Klein forms

رجوع شود به space forms (صورتهای فضا).

بسته ۱۰ closed

مجموعه‌ای که مکمّلش باز است.

بستار ۱۰ closure

درون یک مجموعه به‌انضمام مرز آن، بستار آن را تشکیل می‌دهند.

تناهی بستار ۱۲۶ closure finiteness

یک تجزیهٔ حجره‌یی وقتی متناهی بستار است که بستار هر حجره فقط تعدادی متناهی از حجره‌ها را قطع کند.

نقطهٔ انباشتگی ۶ cluster point

نقطهٔ انباشتگی یک زیرفضای $A \subset \mathbb{R}$، نقطه‌ای است چون $p \in \mathbb{R}$، که الزاماً عضو A نیست، ولی برای هر $\varepsilon > o$، اشتراک

$$A \cap (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\backslash p$$

ناتهی است. همچنین است، برای یک زیرفضای $A \subset X$ از یک فضای توپولوژیک X (p یک نقطهٔ انباشتگی A است، یعنی برای هر همسایگی pی U، اشتراک $A \cap U \backslash p$ ناتهی است

درشت بافت ۱۹ (رجوع شود به fine «ریزبافت») coarse

فروریزی یک زیرفضا ۵۴ collapsing of a subspace

فروریزی یک زیرفضای $A \subset X$ به یک نقطه: گذر به‌فضای خارج‌قسمتِ X/A تحت رابطهٔ هم‌ارزیی که همهٔ نقاط A را یکی می‌گیرد؛ به‌عبارت دیگر گذر از X به X/A را فروریزی A به یک نقطه گویند.

فضایی را فشرده گویند که هر پوشش باز آن یک زیرپوشش متناهی بپذیرد. غالباً هاوسدورف بودن را نیز به این شرط اضافه می‌کنند.

فضائی است متری که در آن هر دنبالهٔ کوشی همگرا باشد.

فضای برداری توپولوژیکی است که در آن هر دنبالهٔ کوشی همگراست، مفهوم دنبالهٔ کوشی به‌کمک همسایگیهای مبدأ تعریف می‌شود (زیرا متریک وجود ندارد!).

فضای توپولوژیکی که هر مجموعهٔ یک نقطه‌یی در آن بسته باشد و برای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ A و هر نقطهٔ $p \notin A$، یک تابع پیوسته بتوی $[o, ۱]$ بتوان یافت که در p مقدار o و در A مقدار ۱ بگیرد.

فضای تکمیلی یک فضای متری: فضای متری کاملی است که فضای مفروض (به‌صورت یک فضای متری) در آن مشمول و چگال باشد.

مخروط روی X چنین تعریف می‌شود:

$$CX := X \times [o, ۱]/X \times \{۱\}$$

یک فضای X که تنها مجموعه‌های باز و بستهٔ آن، $\varnothing$ و X باشند.

نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است اگر نگارهٔ وارون مجموعه‌های باز، مجموعه‌های باز باشند.

فرض پیوستار ۲۲۵ continuum hypothesis

انقباض‌پذیر ۸۱ contractible

فضایی که از لحاظ مانسته جایی با فضای یک نقطه‌یی هم‌ارز باشد

پادوردا ۹۱ contravariant

تابعگون F را پادوردا گویند هرگاه به هر ریختی $X \to Y$ یک ریختی «در جهت عکس» وابسته کند: $F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(x)$.

همگرایی ۲۵ convergence

a را حد یک دنباله در یک فضای توپولوژیک گویند هرگاه برای هر همسایگی a چون U، این دنباله سرانجام در U قرار گیرد.

ویژگی محدب ۱۵۴ convex property

ویژگی محدب در مقاطع کلافهای برداری: قرارگرفتن در یک Ω است به‌قسمی که برای هر x، Ω_x محدب باشد.

اصلهای موضوع شمارایی ۱۰۳ countability axioms

این اصول، به‌وجود یک پایهٔ شمارای همسایگی برای هر نقطه (در اصل موضوع نخست) و یا وجود یک پایهٔ شمارا برای توپولوژی (در اصل موضوع دوم) نیاز دارند.

هموردا ۹۰ covariant

تابعگون F را هموردا گویند هرگاه به هر ریختی $X \xrightarrow{f} Y$ ریختی دیگری را در «همان جهت» وابسته کند: $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$.

فضای پوششی ۱۶۷ covering space

یک تاربندی بیمایهٔ موضعی با تارهای گسسته.

تبدیلات پوششی ۱۹۱ covering transformations

تبدیلات پوششی یک فضای پوششی $Y \xrightarrow{\pi} X$ همسانریختیهایی مانند φ از Y به روی خود هستند به‌قسمی که $\pi \circ \varphi = \pi$.

مکعب ۹۹، ۲۰۶ cube

$$I^n = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$$

مجتمع CW یا مجتمع ضَثَبْ ۱۲۵ CW- complex

فضایی همراه با یک تجزیهٔ حجره‌یی که در اصول موضوعهٔ زیر صدق کند: (۱) وجود نگاشتهای مشخصه، (۲) تناهی بستار (۳) توپولوژی ضعیف.

مخروط ۵۵ $X \times [0, 1]/X \times 1$ CX

مشخصهٔ اویلر، عدد اویلر ۹۳، ۹۴، ۱۳۶ Euler characteristic, Euler number

همان حاصلجمع تعداد یالها، رأسها و جز آن در یک مجتمع سادکی، و یا همان حاصلجمع اعداد بتی در یک فضای توپولوژیک.

سیری کوتاه در کلافهای برداری ۱۵۰ excursus on vector bundles

قضیهٔ وجود برای فضاهای پوششی ۱۹۱

existence theorem for covering spaces

این قضیه می‌گوید که تحت چه شرایطی، برای یک زیر گروه مفروض $G \subset \pi_1(X, x_o)$، یک فضای پوششی وجود دارد به‌قسمی که زیر گروه مشخصه‌اش G باشد.

نقطهٔ بیرونی ۱۰ exterior point

نقطهٔ بیرونی B: هر نقطه‌ای که $X \backslash B$ یک همسایگی برای آن باشد.

پالایه ۲۱۳، ۲۱۵ filter

پالایه روی X: مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X که هر فوق‌مجموعهٔ هر یک از عضوهای خود، و اشتراک هر دو عضو خود را در بردارد، و مجموعهٔ تهی را در برندارد.

همگرایی پالایه ۲۱۵ filter convergence

یک پالایه همگراست به a هرگاه هر همسایگی a عضو پالایه باشد.

ریزبافت ۱۹ fine

اگر $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ توپولوژیهایی بر X باشند، $\mathcal{O}$ را (که مجموعه‌های بازکمتری دارد) درشت بافت‌تر از $\mathcal{O}'$ گویند و $\mathcal{O}'$ را (که مجموعه‌های باز بیشتری دارد). ریز بافت‌تر از $\mathcal{O}$ نامند.

شمارای یکم ۱۰۳ first countable

رجوع شود به اصلهای موضوع شمارایی countability axioms

تابعگون نادیده‌گیر ۹۲، ۹۵ forgetful functor

سریهای فوریه ۶ Fourier series

سریهای تابعی به‌شکل

$$\frac{a_o}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

اصل موضوع جداسازی هاوسدورف ۲۴ Hausdorff separation axiom

هر دو نقطهٔ متمایز همسایگیهای جدا از هم دارند.

فضای هاوسدورف ۲۴ Hausdorff space

فضای توپولوژیکی که در اصل موضوع جداسازی هاوسدورف صدق می‌کند.

پایهٔ هیلبرتی ۳۷ Hilbert basis

یک دستگاه یکا متعامد کامل در یک فضای هیلبرت.

مکعّب هیلبرت ۲۰۶ Hilbert cube

در یک فضای تفکیکپذیر هیلبرت، مثلاً فضای دنباله‌های مربع انتگرالپذیر، زیرفضای متشکل از دنباله‌های $(x_n)_{n\geq ۱}$ با شرط $|x_n| \leq \frac{۱}{n}$.

فضای هیلبرت ۳۶ Hilbert space

فضائی کامل با حاصلضرب داخلی.

همسانریخت ۲۱ homeomorphic

دو فضا را همسانریخت گویند اگر یک همسانریختی بین آنها موجود باشد.

همسانریختی ۲۰ homeomorphism

یک نگاشت دو سویی $f : X \to Y$ به‌قسمی که هم f پیوسته باشد و هم $f^{-۱}$.

فضای همگن ۴۸ homogeneous space

یک خارج‌قسمت از گروههای توپولوژیک چون G/H

مانستگی ۹۵، ۹۷، ۱۲۲، ۱۳۵ homology

در این کتاب از مانستگی (و تعدادی از اشیاء دیگر) فراتر از قلمرو توپولوژی نقطه ـ مجموعه چندین بار صحبت می‌شود، اما تعریف آن داده نشده است. رجوع شود به مرجع[۵] یا [۱۶].

مانسته جا ۷۸، ۷۹ homotopic

دو نگاشت $X \to Y$ را مانسته جا گویند هرگاه بتوانند به‌طور پیوسته به‌یکدیگر بدل شوند.

مانسته جایی ۷۹ homotopy

مانسته جایی بین نگاشتهای $f, g : X \to Y$ یک نگاشت پیوستهٔ $H : X \times [o, ۱] \to Y$ است که در شرطهای $H_o = f$ و $H_۱ = g$ صدق می‌کند.

رستهٔ مانسته جایی ۸۹ homotopy category

ناوردا ۹۳ invariant

یکریختی ۱۶۶ isomorphism

یکریختی بین فضاهای توپولوژیک (Y,π) و $(\widetilde{Y},\tilde{\pi})$ بالای X: یک همسانریختی $\varphi: Y \to \widetilde{y}$ است که در شرط $\tilde{\pi} \circ \varphi = \pi$ صدق کند (یعنی همسانریختی «بالای» X باشد).

یکریختیها ۹۰ isomorphisms

در یک رسته: ریختیهایی را گویند که وارونپذیر باشند. در رستهٔ توپولوژیک، به‌عنوان مثال، یکریختیها همان همسانریختیها هستند.

گروه تکروندیِ ۵۳ isotropy group

به stabilizer (پایدارساز) مراجعه شود.

بطری کلاین ۶۲ Klein bottle

منسوب به فلیکس کلاین (۱۸۴۹ تا ۱۹۲۵)

اصلهای موضوع بستار کوراتوفسکی ۱۲ Kuratowski closure axioms

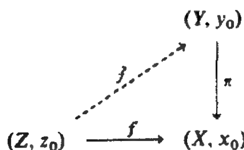
روش دیگری برای بررسی مفهوم فضاهای توپولوژیک ـ بیان مفهوم بستار به‌روش اصل موضوعی.

ترتیب الفبایی ۲۱۹ lexicographical ordering

گروههای لی ۱۱۳، ۲۰۳ Lie groups

خمینه‌های دیفرانسیلپذیر همراه با ساختار گروه دیفرانسیلپذیر.

ملاک قابلیت بالابری ۱۸۲ liftability criterion



در نمودار در پی یافتن $\tilde{f}$ هستیم. این ملاک به گروه بنیادی اطلاق می‌شود.

موضعاً محدب ۴۰ locally convex

فضای برداری توپولوژیکی که هر همسایگی مبدأ آن شامل یک همسایگی محدب است.

همسانریخت موضعی ۱۶۸ locally homeomorphic

یک نگاشت $f: X \to Y$ که به‌ازای هر $x \in X$ همسایگیهای بازی چون U برای

نظریهٔ مورس ۶۰، ۸۶ Morse theory

نظریهٔ توپولوژیکی دیفرانسیل که به‌وسیلهٔ مارستن مورس (۱۸۹۲ تا ۱۹۷۷) Marston Morse پرورده شده و به‌موجب آن می‌توان ویژگیهای توپولوژیک خمینه‌ای را (که ممکن است بینهایت بعدی نیز باشد)، از روی نوع و تعداد نقاط بحرانی یک تابع بر آن خمینه نتیجه‌گیری کرد.

در یک رسته، مجموعهٔ ریختیهای از X به Y ۸۷. Mor (X, Y)

همسایگی ۱۰ neighborhood

همسایگی یک نقطهٔ x مجموعه‌ای است که نه تنها x بلکه تمامی مجموعهٔ باز شامل x را دربر می‌گیرد.

اصول موضوعهٔ همسایگی ۱۲ neighborhood axioms

راه دیگر نگرش به مفهوم «فضاهای توپولوژیک»، از طریق بیان مفهوم همسایگی با روش اصل موضوعی.

پایهٔ همسایگی ۱۰۳ neighborhood basis

مجموعه‌ای از همسایگیهای x_o که در آن «همسایگیهای به‌دلخواه کوچک جا داشته باشند»، به‌عبارت دیگر: هر همسایگی x_o شامل یکی از همسایگیهای پایه باشد.

گروههای مرزپوشی ۱۰۱ $\mathfrak{N}_n$

نرم ۳۷ norm

نگاشت مثبت معین همگن $\|\cdots\|: E \to \mathbb{R}$ همراه با نامساوی مثلثی.

فضای پوششی نرمال ۱۹۳ normal covering space

فضای پوششی است که زیرگروه مشخصهٔ آن در گروه بنیادی فضای پایهٔ یک زیرگروه نرمال باشد. از لحاظ هندسی بدین‌معنی‌ست که گروه تبدیلات پوششی به‌طور ترایا بر تارها عمل می‌کنند.

نرمال‌ساز ۱۹۲ normalizer

نرمال‌ساز یک زیرگروه $B \subset A$، بزرگترین زیرگروه N_B، مابین B و A، که در آن B همچنان نرمال باشد.

قطب شمال ۵۷ north pole

قطب شمال کرهٔ $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ نقطهٔ N است که $\mathrm{N} = (o, \cdots o, 1)$.

مانسته‌جا با صفر ۱۸۹ null-homotopic

طوقه‌ای (با دو سر ثابت) که با طوقه‌های ثابت مانسته جاست و در گروه بنیادی

حکم عضو خنثی را دارد.

تعداد برگها ۱۶۷ number of leaves

در یک فضای پوششی، تعداد برگها در یک نقطهٔ x، تعداد نقاط در تار بالای x است.

ردهٔ اشیاء رستهٔ $\mathscr{C}$ ۸۷ $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$

توپولوژی فضای متری (X, d) ۱۳ $\mathcal{O}(d)$

باز ۱۰ open

تعریف «فضای توپولوژیک» بر مبنای بیان این مفهوم به روش اصل موضوعی. همهٔ مفاهیم توپولوژی دیگر، از مفهوم بنیادی «باز» مشتق می‌شوند.

گوی باز ۱۴ open ball

در یک فضای متری، مجموعهٔ $\{y|d(x,y) < \varepsilon\}$ را «εـ گوی باز» حول x نامند. به موجب نابرابری مثلثی، این مجموعه واقعاً در $\mathcal{O}(d)$ قرار دارد.

حجره‌های باز ۱۰۵ open boxes

در $X \times Y$: مجموعه‌هایی به شکل $U \times V$ که U در X باز است و V در Y. در حاصلضربهای نامتناهی: اشتراکهای متناهی «استوانه‌های باز» را حجره‌های باز نامند. حجره‌های باز، یک پایه برای توپولوژی حاصلضربی تشکیل می‌دهند.

پوشش باز ۲۶ open cover

پوشش باز برای یک فضای توپولوژیک X: خانواده‌ای از مجموعه‌های باز مانند $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

مدار ۵۱ orbit

مدار یک نقطه در یک G ـ فضا: مجموعهٔ Gx متشکل از نقاطی که عمل گروهی بتواند x را به‌آن نقاط ببرد.

فضای مداری ۵۲ orbit space

دریک G ـ فضای X، مجموعهٔ X/G متشکل از مدارها، و مجهز به توپولوژی خارج قسمت.

اعداد ترتیبی ۲۲۳ ordinals

توپولوژی القایی بر $X_o \subset X$ توسط $(X, \mathcal{O})$ ۱۵ $\mathcal{O}|X_o$

پیرافشرده ۱۵۹ paracompact

فضای هاوسدورفی که هر پوشش باز آن یک تظریف موضعاً متناهی داشته باشد.

اهمیت این فضاها در آن‌است که این فضاها که هر پوشش باز آنها یک افراز فرعی واحد را می‌پذیرد دقیقاً فضاهای پیرا فشرده‌اند.

مجموعهٔ جزئاً مرتب ۲،۱۹ partially ordered set

افراز ۱۲۲ partition

افراز یک مجموعهٔ X: مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو جدا از هم که اجتماع آنها همهٔ X باشد.

افراز واحد ۱۵۰ partition of unity

نمایش‌تابع ثابت ۱ بر فضای توپولوژیک X به‌صورت حاصلجمع توابع $X \to [o,1]$ که «موضعاً متناهی» باشند. هنگامی مفیدند که جمعیده‌ها، محمل «کوچک» داشته باشند.

راه ۲۲ path

یک نگاشت پیوستهٔ $[o,1] \to X$

همبند ـ راه ۲۲ path-connected

فضایی‌که هر دو نقطهٔ آن‌را بتوان با یک راه به هم وصل کرد.

بالابریِ راه ۱۷۰ path lifting

فنی‌در نظریهٔ فضاهای پوششی که در آن واحد همه جا حاضر است: اگر $Y \xrightarrow{\pi} X$ یک فضای پوششی و y_o نقطه‌ای بالای نقطهٔ آغاز یک راه مفروض α در X باشد، در این‌صورت، دقیقاً یک راه «بالابرده شده» $\tilde{\alpha}$ با شروع از y_o وجود دارد (منظور از راه بالابرده شده این‌است که $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$).

پئانو، جوزپه (۱۸۵۸ تا ۱۹۳۲) ۱۹۵ Peano,Giuseppe(1858-1932)

n امین گروه زائد مانسته‌جاییِ (X, x_o) ۹۹ $\pi_n(X, x_o)$

به اضافه ۱۷ +

$X + Y$ معرف اجتماع جدا از هم مجموعه‌ها یا فضاهای توپولوژیک است.

چند وجهی ۱۱۷ polyhedron

رجوع شود به simplicial complexes (مُجتمعهای سادکی)

فضای مقدم فرشه ۳۹ pre-Fréchet space

یک‌فضای برداری توپولوژیک هاوسدورف، که توپولوژی آن با دنباله‌ای از نیمنرمها داده شود. کامل بودن فضا الزامی نیست.

حاصلضرب فضاهای توپولوژیک ۱۷، ۱۰۵ product of topological spaces

متریک ریمانی ۱۵۶ Riemann metric

بر یک کلاف برداری E: منظور حاصلضربی است عددی مانند $<..,..>_x$ بر هر تار E_x، به قسمی که تابع $x \to <..,..>_x$ به تعبیر مناسبی پیوسته یا دیفرانسیلپذیر باشد.

رویه‌های ریمانی ۲۰۱ Riemann surfaces

خمینه‌های‌مختلط یک بعدی همبند. در متن کتاب هم جزئیات بیشتری در مورد آن نیامده است. مراجعه شود به [۹].

قضیهٔ شرودر-برنشتاین ۲۲۱ Schrödee-Bernstein theorem

شمارای دوم ۱۰۳ second countable

مراجعه شود به اصلهای موضوع شمارایی

مقطع ۹۶، ۱۵۱ section

مقطع‌یک نگاشت پیوستهٔ $\pi : Y \to X$ نگاشتی است پیوسته چون $\sigma : X \to Y$ که در شرط $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_X$ صدق کند.

همبند سادهٔ نیمه موضعی ۱۸۹ semi-local simply connected

فضایی را گویند که هر نقطهٔ x در آن یک همسایگی U داشته باشد به قسمی که هر طوقه در نقطهٔ x واقع در مجموعهٔ U، در کل فضا مانسته‌جا با صفر باشد.

نیمنرم ۳۸ seminorm

مانند نرم $|\cdot| : E \to \mathbb{R}$ است، با این تفاوت که $|x|$ می‌تواند برای $x \neq o$ نیز برابر o شود.

تفکیکپذیر ۱۱۳ separable

فضایی توپولوژیک که یک زیرمجموعهٔ شمارای چگال داشته باشد.

دنباله‌یی فشرده ۱۰۸ sequentially compact

مجموعه‌ای‌که هر دنباله در آن دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد.

دنباله‌یی پیوسته ۱۰۷ sequentially countinuous

نگاشتی که هر دنبالهٔ همگرا را به دنباله‌ای همگرا به نگارهٔ حدّ ببرد.

بهم فشردن ۱۶۲ shrinking

بهم‌فشردن یک پوشش باز: به‌دست آوردن پوشش باز دیگری است که بستار مجموعه‌های آن در مجموعه‌های پوشش اول باشد.

سادک ۱۱۶ simplex

غلاف‌محدب $k+1$ نقطه در $\mathbb{R}^n$ را در وضعیت عام یک kـ سادک نامند.

رستهٔ سادگی ۱۲۱ simplicial category

مجتمعهای سادکی و نگاشتهای سادکی.

مجتمع سادکی ۱۱۵ simplicial complex

مجموعه‌ای‌چون K از سادکها در $\mathbb{R}^n$ (که در چند شرط نظم صدق کنند). نام مجتمع سادکی به اجتماع $|K|$ تا از سادکها نیز اطلاق می‌شود.

مانستگی سادکی ۱۲۱ simplicial homology

(تعریف در متن نیامده است).

نگاشت سادکی ۱۲۱ simplicial map

نگاشتی‌بین مجتمعهای سادکی که kـ سادکها را به‌طور آفین به kـ سادکها ببرد.

ساده ـ همبند ۱۸۹، ۱۹۴ simply connected

فضای همبند ـ راه را ساده ـ همبند گویند اگر هر طوقهٔ آن مانسته با صفر باشد. یعنی اگر برای یک (و در نتیجه برای هر) پایه ـ نقطه، گروه بنیادی گروه بیمایه باشد.

کالبد ۱۲۶ skeleton

دریک فضای X با تجزیهٔ حجره‌یی، منظوراز nـ کالبد X^n، اجتماع همهٔ حجره‌های با بعد مساوی با n یا کمتر از n است.

رستهٔ کوچک ۹۰ small category

رسته‌ای که اشیاء آن عضوهای یک مجموعه باشند.

حاصلضرب رَخْلی ۵۷ smash product

$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$$

فضای سوبولف ۷۷ Sobolev space

چنبرهٔ توپر ۸۴ solid torus

$$S^1 \times D^2$$

صورتهای فضایی ۲۰۲ space forms

مفهومی‌از هندسهٔ دیفرانسیل: خمینه‌های ریمانی همبند کامل با انحنای مقطعی ثابت ریمان؛ این مفهوم در متن کتاب باز نشده است. ریمان (در ۱۸۵۴) آنها را مدلی برای فضای فیزیکی حقیقی می‌پنداشت.

خم فضا پرکن ۱۹۵ space-filling curve

نگاشت‌پیوسته و پوشای: $[0,1] \to [0,1]^n$

طیف ۲۱۰ spectrum

طیف‌یک جبر تعویضپذیر باناخ: مجموعهٔ همهٔ ایدآلهای ماکسیمال آن است، که به توپولوژی ضعیف ـ ستاره مجهز باشد.

پایدارساز ۵۳ stabilizer

پایدارساز یک نقطهٔ x در یک G ـ فضا، و یا گروه یکروندی این نقطه: زیرگروهی از G که نقطهٔ x را ثابت نگه می‌دارد.

فشرده‌سازی (توسیع فشردهٔ) ستون ـ چخ ۲۱۲ Stone-Čech compactifiation

βX که از توسیع فشردهٔ یک فضای کاملاً منظم X به‌دست می‌آید؛ به یک معنی، βX «بزرگترین» توسیع فشردهٔ ممکن برای X است.

زیرپایه ۱۸ subbasis

زیرپایهٔ‌یک توپولوژی: مجموعه‌ای از مجموعه‌های باز شامل تعداد کافی مجموعه برای «تولید» توپولوژیِ فضا؛ یعنی اشتراکهای متناهی مجموعه‌های یک زیرپایه، تشکیل یک پایه بدهند. (مثلاً استوانه‌های باز یک زیرپایهٔ توپولوژی حاصلضربی را تشکیل می‌دهند).

زیر مجتمع ۱۲۸ subcomplex

زیرمجتمع یک مجتمع ضَمَّث: اجتماعی بسته از حجره‌ها.

وابسته ۱۵۰ subordinate

یک‌افراز واحد را وابسته به یک پوشش گویند هر گاه محمل هر یک از توابع این افراز، مشمول در یکی از مجموعه‌های پوشش باشد.

زیر سادک ۱۱۷ subsimplex

زیر فضا ۱۵ subspace

یک زیر فضای X_o در فضای X: زیرمجموعهٔ $X_o \subset X$ مجهز به یک توپولوژی مخصوص، به‌نام توپولوژی «زیرفضا».

توپولوژی زیرفضا ۱۵ subspace topology

همان توپولوژی القایی است.

حاصلجمع ۱۶ sum

حاصلجمع مجموعه‌ها و فضاها. رجوع شود به disjoint union (اجتماع جدا از هم).

محمل ۱۴۰ support

یک فضای برداری مجهز به یک توپولوژی سازگار با ساختار خطی آن.

توپولوژی ۱۰ topology

معنای فنی آن: مجموعهٔ مجموعه‌های باز یک فضای توپولوژیک؛ معنای عمومی آن: نظریهٔ فضاهای توپولوژیک.

توپولوژی یک فضای متری ۱۳ topology of a metric space

توپولوژی فضای متری (X,d) که با $\mathcal{O}(d)$ نموده می‌شود چنین است:

$$\mathcal{O}(d) := \{U|\forall x \in U, \exists \varepsilon > o \quad K_\varepsilon(x) \subset U\}$$

ترایا ۱۹۳ transitive

عمل یک گروه در یک مجموعه را ترایا گویند هرگاه فقط یک مدار وجود داشته باشد، یعنی برای هر $x, y \in Y$ همواره یک $g \in G$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $y = gx$.

نابرابری مثلثی ۱۳ triangle inequality

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

توپولوژی بیمایه ۱۹ trivial topology

درشت‌بافت‌ترین توپولوژی، که فقط شامل $\varnothing$ و X است.

تیخونوف، آندری نیکلایویچ ۲۰۴ Tychonoff, Andrej Nikolajevitch

متولد ۱۹۰۶

قضیهٔ حاصلضرب تیخونوف ۲۰۵ Tychonoff product theorem

حاصلضربهای دلخواه فضاهای فشرده فضاهایی هستند فشرده. آنچه را که ما فشرده نامیده‌ایم، تیخونوف «دوسوفشرده» (bicompact) نامیده است. او در صفحهٔ ۷۷۲ مرجع [۲۰] چنین می‌نویسد: «حاصلضرب فضاهای دوسوفشرده نیز دوسوفشرده است. راه اثبات دقیقاً همان راهی است که در مورد دوسوفشردگی حاصلضربهای بازه‌ها به‌کار رفته است»، و آن را در بخش ۲ مرجع [۱۹] ارائه کرده است.

«این قضیه محتملاً مهمترین قضیهٔ منفرد در توپولوژی عمومی است» (نقل از توپولوژی عمومی، تألیف کلی J. L. Kelley، نشر Springer-Verlag).

فراپالایه ۲۱۵ ultrafilter

یک پالایهٔ ماکسیمال

یکنواخت ـ پیوسته ۷۳ uniformly continuous

نگاشتی بین فضاهای متری را یکنواخت ـ پیوسته گویند هرگاه برای هر $o < \varepsilon$ یک $o < \delta$ موجود باشد به‌قسمی که نقاط با دوری کمتر از δ را به نقاطی با دوری ε بنگارد.

قضیهٔ یکتایی برای فضاهای پوششی ۱۸۴
uniqueness theorem for covering spaces

این قضیه می‌گوید که تا چه حد، یک فضای پوششی به‌وسیلهٔ نگارهٔ گروه بنیادی «بالایی» در گروه بنیادی «پایینی» معین می‌شود (این نگاره را «زیرگروه مشخصه» نامند).

پوشش عام ۱۹۵ — universal cover

پوشش عام یک فضا: فضای پوششی همبند ساده (که به‌طور یکتا معین می‌شود). برای علامتگذاری «عام» به قضیهٔ صفحهٔ ۱۹۱ مراجعه شود.

اوریسون، پاول ساموئیلوویچ ۱۴۲ — Urysohn, Pavel Samuilovitch

۱۹۲۴_۱۸۹۸

لم اوریسون ۱۴۲ — Uryshon lemma

قضیهٔ بنیادی در ساختن توابع بر فضاهای توپولوژیک.

کلاف برداری ۱۵۰ — vector bundle

متشکل است از فضاهای پایه و کلی، به‌علاوهٔ تصویر و ساختار فضای برداری بر تارها. «اصل موضوع بیمایگی موضعی» باید برآورد شود. مثال: کلاف مماسی یک خمینه.

میدان برداری ۲۷، ۵۱، ۱۵۵ — vector field

مثالهایی از انتگرالگیری میدانهای برداری بر خمینه‌های دیفرانسیلپذیر را آورده‌ایم تا خواننده با این گونه موضوعها آشنا شود. برای فراگرفتن آنها رجوع کنید مثلاً به [۳].

توپولوژی ضعیف ۴۲، ۱۰۶، ۱۲۶، ۱۳۲، ۲۰۸ — weak topology

برای فضاهای برداری توپولوژیک: درشت‌بافت‌ترین توپولوژی که برای آن تابعهای خطی پیوسته، همچنان پیوسته باشند. برای فضاهایی با تجزیهٔ حجره‌یی: یک مجموعه را در توپولوژیِ ضعیف بسته گویند هرگاه اشتراک آن با بستار هر حجره، بسته باشد.

حاصلضرب گووه‌یی ۵۷ — wedge product

حاصلضرب گووه‌یی در فضای نقطه‌پایه‌دار که آن را با $X \vee Y$ نمایش می‌دهیم، زیر فضای $X \times y_o \cup x_o \times Y$ از فضای $X \times Y$ است.

خوشترتیب ۲۱۹ | well_ordered

وایتهد، ج. ﻫ. ک. ۱۲۶ | Whitehead, J. H. C.

۱۹۰۴ تا ۱۹۶۰

عدد دور ۹۹ | winding number

فضای X/A ۵۴ | X/A

فضای خارج‌قسمت حاصل از فروریزی زیرمجموعهٔ $A \subset X$ به یک نقطه.

فضای مداری ۵۲ | X/G

فضای مداری یک Gـ فضای X.

فضای خارج‌قسمت ۴۳ | $X/\sim$

خارج‌قسمت یک فضای X بر یک رابطهٔ هم‌ارزیِ $\sim$.

مجموعهٔ رده‌های مانسته‌جایی $[X,Y]$ ۸۰ | $[X,Y]$

مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی نگاشتهای از X به Y.

فضای $Y \cup_\varphi X$ ۵۹ | $Y \cup_\varphi X$

فضای حاصل از چسبانیدن X به Y به‌وسیلهٔ φ.

توپولوژی زاریسکی ۲۵ | Zariski topology

توپولوژی یک فضای تصویری که در آن یک مجموعه باز است اگر و تنها اگر متمم آن یک چندگونای تصویری باشد.

لم زُرن ۲۲۰ | Zorn's lemma

اگر هر زنجیر در یک مجموعهٔ جزئاً مرتب M کراندار باشد، آنگاه M یک عضو ماکسیمال دارد.